Задачи

Задача 1 *Доказать, что уравнение Лакса* $L_t = [L, M]$, *где* $L = -\partial_x^2 + u(t,x)$, $M = 4\partial_x^3 - 6u(t,x)\partial_x - 3u_x(t,x)$ *эквивалентно уравнению КдФ:* $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$.

Задача 2 *Пусть* $a(k)$ *и* $b(k)$ *- элементы матрицы матрицы монодромии:* $\varphi(x,k) = a(k)\psi(x,k) + b(k)\overline{\psi}(x,k)$, *где* $k \in \mathbb{R}$, *а* $\varphi(x,k)$ *и* $\psi(x,k)$ *– решения Йоста уравнения Штурма–Лиувилля с потенциалом* $u(x)$, *нормированные на* e^{-ikx} *при* $x \to -\infty$ *и* $x \to +\infty$, *соответственно. Доказать, что справедливы равенства*

$$a(k) = 1 - \frac{1}{2ik}\int dy e^{iky}\varphi(y,k)u(y), \qquad b(k) = \frac{1}{2ik}\int dy e^{-iky}\varphi(y,k)u(y)\,.$$

Задача 3 *Доказать, что все нули функции* $a(k)$, $k \in \mathbb{C}$, *простые.*

Задача 4 *Показать, что* $I_{-1} = \frac{-1}{2}\int dx u(t,x)$, $I_0 = \frac{1}{2}\int dx u^2(t,x)$ *и* $I_1 = \frac{-1}{2}\int dx \left(u_x^2 + 2u^3\right)$ *суть интегралы движения уравнения КдФ,* $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$.