

Программа зачета по группам и алгебрам Ли

Зачет будет проходить в форме письменной работы в субботу 24 марта с 11:00 до 14:00. Темы зачета, ссылки на литературу и примеры задач даны ниже.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРИМЕРЫ ГРУПП ЛИ

Содержание. Гладкие действия групп Ли на многообразиях. Стабилизаторы и орбиты. Расслоения, происходящие из действий групп Ли на многообразиях, и связанные с ними точные гомотопические последовательности.

Литература. Э.Б. Винберг, А.Л. Онищик. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. Глава 1, пп. 1.1–1.10, 3.1, 3.4.

Примеры задач. 1. Докажите, что следующие подгруппы в $GL_n(\mathbb{R})$ являются подгруппами Ли, и найдите их размерности. **а)** Подгруппа матриц, сохраняющая тройку линейно независимых векторов; **б)** подгруппа матриц, перестановочных с проектором ранга 3; **в)** подгруппа матриц, сохраняющих пару несовпадающих прямых, проходящих через 0; **г)** подгруппа матриц, сохраняющих плоскость и не лежащую в ней прямую, проходящие через 0.

2. Найдите число связных компонент и фундаментальную группу группы Ли **а)** ортогональных вещественных матриц 4×4 -матриц, переводящих в себя данную плоскость, проходящую через 0; **б)** вещественных 4×4 -матриц, переводящих в себя данную прямую; **в)** комплексных 4×4 -матриц, переводящих в себя данную прямую; **г)** унитарных 4×4 -матриц, сохраняющих данное 3-мерное подпространство.

2. КАСАТЕЛЬНАЯ АЛГЕБРА ЛИ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

Содержание. Экспоненциальное отображение. Теорема существования и единственности гомоморфизма. Присоединенное представление. Универсальная накрывающая.

Литература. Э.Б. Винберг, А.Л. Онищик. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. Глава 1, пп. 2.1–2.10, 3.2–3.3.

Примеры задач. 1. Найдите все (с точностью до изоморфизма) связные группы Ли, касательная алгебра которых изоморфна **а)** $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$; **б)** $\mathfrak{su}_2 \oplus \mathfrak{su}_2$.

2. Приводимо ли присоединенное представление следующей группы Ли: **а)** $O_3(\mathbb{C})$; **б)** U_3 ; **в)** группа всех движений плоскости; **г)** группа всех аффинных преобразований плоскости?

3. ПРИМЕРЫ АЛГЕБР ЛИ И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Содержание. Алгебры Ли дифференцирований. Идеалы и факторалгебры. Представления алгебр Ли. Алгебры Ли малых размерностей. Представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Литература. Дж. Хамфрис. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. Глава 1, пп. 1.1–2.3.

W. Fulton, J. Harris. Representation theory: a first course. Part 2, lectures 10 and 11.

Э.Б. Винберг, А.Л. Онищик. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. Глава 1, п. 2.10.

Примеры задач. 1. Кососимметричная операция на трехмерном комплексном пространстве задана в базисе $\{x_1, x_2, x_3\}$ следующим образом: **а)**

$$[x_1, x_2] = 0, [x_1, x_3] = x_1 + x_2, [x_2, x_3] = -x_2;$$

б)

$$[x_1, x_2] = x_1 + x_2 + x_3, [x_1, x_3] = x_1 + x_2 + x_3, [x_2, x_3] = x_1 + x_2 + x_3.$$

в)

$$[x_1, x_2] = x_3, [x_1, x_3] = x_2, [x_2, x_3] = x_1.$$

Докажите, что эта операция удовлетворяет тождеству Якоби. Найдите все идеалы в этой алгебре Ли, найдите ее коммутант и центр.

- 2.** Пусть V_n – $n+1$ -мерное неприводимое комплексное представление группы Ли $SL_2(\mathbb{C})$. Разложите в прямую сумму неприводимых представлений группы Ли $SL_2(\mathbb{C})$: **а)** $S^3(V_2)$; **б)** $\Lambda^3(V_4)$; **в)** $\Lambda^3(V_2 \oplus V_2)$.
- 3.** Опишите все **а)** 6-мерные комплексные представления группы Ли $SO_3(\mathbb{C})$; **б)** 4-мерные комплексные представления группы Ли $SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C})$ с точностью до изоморфизма.

4. КОММУТАНТ И РАЗРЕШИМЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ.

Содержание. Коммутант как подгруппа Ли. Замыкание Мальцева и теорема существования виртуальных подгрупп Ли. Конструкция полупрямого произведения. Определение и примеры разрешимых и нильпотентных групп и алгебр Ли. Теорема Ли о представлениях разрешимой алгебры Ли.

Литература. Э.Б. Винберг, А.Л. Онищик. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. Глава 1, пп. 4.1 – 4.5.

Дж. Хамфрис. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. Глава 1, пп. 3.1–3.2.

Примеры задач. 1. а) Найдите все связные разрешимые подгруппы Ли в группе Ли U_2 ; **б)** Найдите все связные разрешимые комплексные подгруппы Ли в группе Ли $SL_2(\mathbb{C})$.