Экзамен по классическим группам 19.03.2012

1. a) Докажите, что кокасательное расслоение к пространству флагов $\mathcal{B}$ в $\mathbb{C}^n$ состоит из пар $(F_\bullet, A)$, где $0 = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n = \mathbb{C}^n$ — полный флаг, а A — эндоморфизм $\mathbb{C}^n$ такой, что $AF_i \subset F_{i-1}$.

b) Докажите, что проекция $\mu(F_\bullet, A) = A$, $T^*\mathcal{B} \to \mathfrak{gl}_n = \mathfrak{gl}_n^*$ (отождествление формой Киллинга) является отображением моментов для симплектического действия GL_n на $T^*\mathcal{B}$.

2. a) Пусть $H \subset G$ — подгруппа группы, симплектически действующей на симплектическом многообразии X. Пусть $\mu:\ X \to \mathfrak{g}^*$ — отображение моментов. Докажите, что $\mathrm{pr} \circ \mu$ — отображение моментов для группы H, где pr — естественная проекция $\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$.

b) Пусть T_xX — (симплектическое) касательное пространство в точке $x \in X$, а $a_x:\ \mathfrak{g} \to T_xX$ — дифференциал действия G в точке x. Докажите, что диаграмма $\mathfrak{g} \xrightarrow{a_x} T_xX \xrightarrow{d_x\mu} \mathfrak{g}^*$ самодвойственна.

3. a) Колчан типа A_{n-1}, $W = (\mathbb{C}^n, 0, \ldots, 0)$, $V = (\mathbb{C}^{n-1}, \mathbb{C}^{n-2}, \ldots, \mathbb{C})$. Докажите, что $\mathfrak{M}_{V,W} \simeq T^*\mathcal{B}$ из первой задачи (изоморфизм симплектических многообразий).

b) Докажите, что $\mathfrak{M}^0_{V,W} \simeq \mathcal{N}$ (нильпотентный конус $\mathfrak{sl}_n$) (изоморфизм пуассоновых многообразий).

4. Колчан типа $\widetilde{A}\widetilde{D}\widetilde{E}$ (аффинный), $W = (\mathbb{C}, 0, \ldots, 0)$ (одномерное пространство в аффинной вершине), $\underline{\dim} V = \delta$ (мнимый корень). Докажите, что a) $\mathfrak{M}^0_{V,W} \simeq \mathbb{A}^2/\Gamma$ (изоморфизм пуассоновых многообразий), где Γ — соответствующая колчану конечная подгруппа $Sp(2)$.

b) $\mathfrak{M}_{V,W}$ симплектически изоморфно минимальному разрешению $\widetilde{\mathbb{A}^2/\Gamma}$.

5. a) Докажите, что автоморфизм $\exp(\mathrm{ad}_{e_i})\exp(-\mathrm{ad}_{f_i})\exp(\mathrm{ad}_{e_i})$ простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ сохраняет Картановскую подалгебру $\mathfrak{h}$ и действует на ней как простое отражение s_i.

b) Докажите, что $T_iE_i := -F_iK_i$, $T_iF_i := -K_i^{-1}E_i$, $T_iK_j := K_jK_i^{-a_{ij}}$, $T_iE_j := E_j$, $T_iF_j := F_j$ при $a_{ij} = 0$; $T_iE_j := v^{-1}E_jE_i - E_iE_j$, $T_iF_j := vF_iF_j - F_jF_i$ при $a_{ij} = -1$ — автоморфизм квантовой группы $U_v\mathfrak{g}$ типа ADE, сохраняющий Картан и действующий на нём как простое отражение s_i.

6. Возьмём приведённое разложение $w_0 = s_1s_2\ldots s_ns_1s_2\ldots s_{n-1}s_1s_2\ldots s_{n-2}\ldots s_1s_2s_1 =: s_{i_1}s_{i_2}\ldots s_{i_{n(n+1)/2}}$ длиннейшего элемента группы Вейля $\mathfrak{sl}_{n+1}$. Докажите, что $\alpha_{i_1}, s_{i_1}\alpha_{i_2}, s_{i_1}s_{i_2}\alpha_{i_3}, \ldots$ — все положительные корни $\mathfrak{sl}_{n+1}$.