

Алгебра. 1 курс. Листок 10.

В этом листке все линейные пространства конечномерны, а характеристика поля отлична от 2.

◇ **10.1.** Пусть $b(u, v)$ — билинейная форма на V . Рассмотрим отображение $f_b : V \rightarrow V^*$, сопоставляющее вектору $u \in V$ линейную функцию на V , заданную формулой $f_b(u)(v) = b(u, v)$. Докажите, что отображение f_b линейно.

а) Зафиксируем некоторый базис в V и рассмотрим двойственный базис в V^* . Как связаны матрицы отображений f_b и f_b^* с матрицей формы b ?

б) Докажите, что форма $b(u, v)$ симметрична (кососимметрична) тогда и только тогда, когда $f_b = f_b^*$ ($f_b = -f_b^*$).

◇ **10.2.** Пусть $K \subset V$ — ядро симметрической или кососимметрической формы b , а линейное подпространство $U \subset V$ таково, что $V = K \oplus U$. Докажите, что ограничение формы b на подпространство U невырождено.

◇ **10.3.** Пусть $b(u, v)$ — невырожденная билинейная форма на V , причем ее ограничение на линейное подпространство $U \subset V$ также невырождено. Докажите, что множества $U^\perp = \{v \in V, b(u, v) = 0 \forall u \in U\}$ и ${}^\perp U = \{v \in V, b(v, u) = 0 \forall u \in U\}$ являются линейными подпространствами в V , причем $V = U \oplus U^\perp$ и $V = U \oplus {}^\perp U$.

◇ **10.4.** а) Пусть $b(u, v)$ — симметрическая билинейная форма на V . Подпространство $U \subset V$ называется **изотропным**, если ограничение формы b на U нулевое. Докажите, что если форма $b(u, v)$ невырожденная, то $\dim U \leq \frac{1}{2} \dim V$.

б) Докажите, что над любым полем существует симметрическая невырожденная билинейная форма, для которой оценку предыдущего пункта нельзя улучшить.

в) Докажите, что над алгебраически замкнутым полем у любой симметрической невырожденной билинейной формы существуют изотропные подпространства размерности $[\frac{1}{2} \dim V]$.

◇ **10.5.** Пусть $\dim V = 3$, зафиксируем в нем базис и некоторый вектор $a \in V$, $\hat{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$.

а) Докажите, что $b_a(u, v) = \det(\hat{u}\hat{v}\hat{a})$ является кососимметрической билинейной формой на V . Найдите матрицу формы b_a . Докажите, что любая ненулевая кососимметрическая билинейная форма на V имеет вид b_a для подходящего вектора $a \in V$.

б) Рассмотрим отображение $f_{b_a} : V \rightarrow V^*$, соответствующее форме b_a из предыдущего пункта. Докажите, что его ядро одномерно, и, следовательно, представляет собой точку $p \in \mathbb{P}(V)$. Рассмотрим соответствующее проективное отображение $\bar{f}_{b_a} : \mathbb{P}(V) \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$, сопоставляющее каждой отличной от p точке плоскости $\mathbb{P}(V)$ прямую. Дайте чисто геометрическое описание отображения \bar{f}_{b_a} .

◇ **10.6.** Пусть $\dim V = 3$, рассмотрим билинейную форму b , заданную в базисе e_0, e_1, e_2 матрицей $\hat{b} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Рассмотрим отображение $f_b : V \rightarrow V^*$ и соответствующее ему проективное

отображение $\bar{f}_b : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$, сопоставляющее каждой точке на плоскости $\mathbb{P}(V)$ прямую. Дайте чисто геометрическое описание отображения \bar{f}_b . (Это удобно сделать в аффинной карте $x_0 \neq 0$.)

◇ **10.7.** 1) Может ли невырожденная квадратичная форма на вещественном двумерном пространстве иметь

а) ровно одно одномерное изотропное подпространство?

б) ровно два одномерных изотропных подпространства?

в) ровно три одномерных изотропных подпространства?

2) Тот же вопрос, но форма не обязательно невырожденная.

- ◇ **10.8.** Приведите пример невырожденной квадратичной формы q на трехмерном вещественном пространстве V , имеющей ненулевые изотропные векторы. Опишите в этом случае кривую на проективной плоскости $\mathbb{P}(V)$, заданную уравнением $q(v) = 0$.
- ◇ **10.9.** Пусть поле \mathbb{K} алгебраически замкнуто и $\dim V = 3$, рассмотрим квадратичную форму q . На проективной плоскости $\mathbb{P}(V)$ рассмотрим множество $X \subset \mathbb{P}(V)$, заданную уравнением $q(u) = 0$.
- 1) Опишите множество X в случаях, когда ранг формы q равен 1, 2 и 3.
 - 2) Докажите, что любая прямая на $\mathbb{P}(V)$ имеет с X либо одну, либо две общие точки.
 - 3) Докажите, что если ранг формы q больше 1, то общая точка одна тогда и только тогда, когда ограничение формы b на соответствующее этой прямой двумерное подпространство вырождена. (При этом в случае ранга 3 эта прямая называется касательной к кривой.)
- ◇ **10.10.** Приведите пример невырожденной квадратичной формы q на четырехмерном вещественном пространстве V , имеющей
- а) только одномерные изотропные подпространства.
 - б) двумерные изотропные подпространства.
- Какая может быть в каждом из этих случаев сигнатура формы q ? Опишите в каждом случае множество точек трехмерного проективного пространства $\mathbb{P}(V)$, заданное уравнением $q(u) = 0$.
- ◇ **10.11.** На линейном пространстве вещественных $n \times n$ матриц $\text{Mat}_n(\mathbb{K})$ задана билинейная форма $b(X, Y) = \text{tr } XY^T$. Найдите ее ранг, сигнатуру и базис, в котором она приводится к сумме квадратов.
- ◇ **10.12.** В условиях предыдущей задачи найдите ортогонал к подпространству симметрических матриц и к подпространству верхнетреугольных матриц.
- ◇ **10.13.** Пусть в условиях задачи 10.11 билинейная форма задана формулой $b(X, Y) = \text{tr } XY$. Найдите ее ранг, сигнатуру и базис, в котором она приводится к сумме квадратов.
- ◇ **10.14.** Для каждой из форм задач 10.11 и 10.13 найдите ядро и укажите какое-нибудь изотропное подпространство максимальной возможной размерности и какое-нибудь гиперболическое подпространство максимальной возможной размерности.
- ◇ **10.15.** Докажите, что функция на пространстве вещественных 2×2 матриц, сопоставляющая матрице ее определитель, является квадратичной формой. Напишите матрицу соответствующей симметрической билинейной формы в каком-нибудь базисе. Найдите ранг и сигнатуру этой формы. Найдите ядро этой формы и укажите какое-нибудь изотропное подпространство максимальной возможной размерности и какое-нибудь гиперболическое подпространство максимальной возможной размерности.
- ◇ **10.16.** В линейном пространстве вещественных функций $T_n = \{\sum_{m=0}^n a_m \cos^m x, \quad a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$ задана билинейная форма $b(\varphi, \psi) = \int_0^{2\pi} \varphi(x)\psi(x)dx$. Найдите ее ранг и сигнатуру. Найдите функции, который получаются из базиса $1, \cos x, \cos^2 x, \dots, \cos^n x$ в результате применения процесса ортогонализации Грамма-Шмидта.
- ◇ **10.17.** В пространстве из задачи 10.16 форма задана формулой $b(\varphi, \psi) = \int_0^{2\pi} \varphi(x)\psi(\frac{\pi}{2} - x)dx$. Докажите, что эта билинейная форма симметрична и найдите ее ранг и сигнатуру.
- ◇ **10.18.** Для каждой из форм задач 10.16 и 10.17 найдите ядро и укажите какое-нибудь изотропное подпространство максимальной возможной размерности и какое-нибудь гиперболическое подпространство максимальной возможной размерности.
- ◇ **10.19.** * Рассмотрим некоторый граф без петель и кратных ребер с n вершинами. Определим матрицу (a_{ij}) билинейной формы так: $a_{ii} = 2, i = 1 \dots n$, а при $i \neq j$ $a_{ij} = -1$ если вершины i и j соединены ребром, а остальные $a_{ij} = 0$.
- 1) Докажите, что если эта форма положительно определена, то граф является деревом.
 - 2) Приведите пример дерева, для которого эта форма не положительно определена.
 - 3) Придумайте бесконечное множество деревьев, для которых эта форма положительно определена. **4) Перечислите все деревья, для которых эта форма положительно определена.