А. К. Погребков

Лекции по теории нелинейных интегрируемых уравнений

Высшая школа экономик
3 лекции, март 2012 г.

Содержание

1 Лекция 1

1.1 О лошадях

Первое наблюдение уединеной волны. 1834г., шотландский ученый и инженер Дж. Скотт Расселл:

> “Я наблюдал за движением баржи, которую быстро тащила вдоль узкого канала пара лошадей, когда внезапно баржа остановилась – вся масса воды в канале пришла в движение; вода собралась у носа корабля в состоянии бурного волнения, затем вдруг оторвалась от него и покатилась вперед с большой скоростью, приняв вид большого уединенного возвышения; округлый, гладкий, четко выраженный холм воды продолжал свое движение по каналу без видимого изменения формы или уменьшения скорости. Я бросился за этой волной верхом на лошади и догнал ее, когда она все еще двигалась со скоростью около восьми или девяти миль в час, сохраняя первоначальную форму, и имела около тридцати футов в длину и от фута до полутора футов в высоту. Ее высота постепенно уменьшалась, и после одной или двух миль погони я потерял ее в изгибах канала. Так в августе месяце 1834г. произошла моя первая встреча с этим необыкновенным и прекрасным явлением, которое я назвал Волной Переноса (The Wave of Translation)..."

В 1872г. Буссинеску открыл солитонное решение – для длинных волн на поверхности жидкости:

$$-u(x,t) = \frac{2\kappa^2}{\mathrm{ch}^2\kappa(x-4\kappa^2 t - x_0)}. \tag{1.1.1}$$

В 1895г. Кортевег и де Фриз (Голландия) получили уравнение распространения волн в одном направлении по поверхности мелкого канала (для невязкой, несжимаемой, однородной жидкости в постоянном поле тяжести)

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \qquad u = u(t,x). \tag{1.1.2}$$

В 1954г. Ферми, Паста и Улам, изучая на ЭВМ поведение цепочки нелинейных осцилляторов (что можно рассматривать как численное моделирование КдФ), обнаружили аномально медленную стохастизацию этой этой динамической системы.

В 1958г. Сагдеев показал, что в плазме могут распростроняться волны переноса, а Гарднер и Морикава в 1960 г. показали, что уравнения, описывающие сильную плазму аналогичны КдФ.

В 1965г. Забуски и Крускал, экспериментируя с численными решениями КдФ показали, что солитоны сталкиваются упруго и ввели само понятие ‘солитон’. Затем были открыты бесконечные серии законов сохранения.

> Мы будем называть солитонами любые (экспоненциально) локализованные нелинейные волны, которые взаимодействуют с произвольными локальными возмущениями и всегда восстанавливают асимптотически свою форму.

В 1967г. Гарднер, Грин, Крускал и Миура предложили метод спектрального преобразования как метод решения задачи Коши

$$u(0,x) = u_0(x), \tag{1.1.3}$$

для уравнения КдФ, где $u_0(x)$ – заданное начальное данное. Современный вариант этого метода называется методом обратной задачи рассеяния.

В 1968г. Лакс обобщил этот метод и вскрыл алгебраический механизм, лежащий в основе работы Гарднера, Грина, Крускала и Миуры. Уравнение КдФ эквивалентно **представлению Лакса**

$$L_t = [L, M] \tag{1.1.4}$$

для пары операторов L и M (говорят также, что операторы L и M образуют **лаксову пару**). Как мы увидим в дальнейшем, именно соотношение (1.1.4) лежит в основе применимости метода обратной задачи к нелинейным эволюционным уравнениям. Существование и конкретный вид этих операторов, конечно, существенно зависят от пассматриваемого нелинейного уравнения.

В 1971г. Гарденер, Захаров и Фаддеев построили теорию уравнения КдФ как гамильтоновой системы.

> Лиувилль: если в системе с n степенями свободы известны n независимых первых интегралов, то система интегрируема в квадратурах.

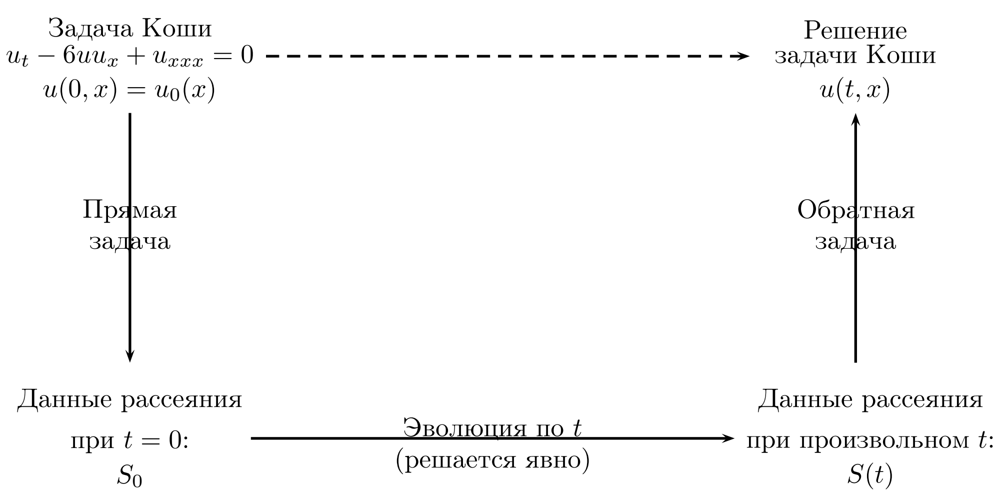
В 1971г. Захаров и Шабат решили методом обратной задачи нелинейное уравнение Шредингера!

В 1973г. метод был применен сразу к нескольким уравнениям в работе Абловица, Каупа, Ньюэлла и Сигура.

В 1975г. Захаров и Шабат предложили процедуру одевания. И поехало!!!

Помимо уравнения КдФ в 19-м веке были известны: уравнение sine-Гордон и уравнение Цицейки. Для уравнения sine-Гордон, возникающего при описании поверхностей постоянной отрицательной кривизны, был открыт способ построения и “размножения” солитонных решений – преобразование Беклунда.

Школы Новикова и Фаддеева.



1.2 Лаксова пара

Лаксова пара для уравнения КдФ – пара дифференциальных операторов:

$$L = -\partial_x^2 + u\,, \tag{1.2.1}$$

$$M = 4\partial_x^3 - 6u\partial_x - 3u_x\,, \tag{1.2.2}$$

см. Задачу 1. Важнейшей особенностью пары Лакса является то, что временна̀я производная не входит в L-оператор. Таким образом мы можем рассматривать t как параметр и исследовать спектральные свойства этого оператора, т.е., исследовать решения уравнения

$$Ly = \lambda y\,. \tag{1.2.3}$$

Это уравнение на функцию $y(t,x)$ есть **спектральная проблема** для оператора (1.2.1), иногда оно также называется **вспомогательной линейной задачей** для рассматриваемого нелинейного уравнения. Заметим, что в силу (1.1.4)

$$(L-\lambda)(y_t + My) = 0\,, \tag{1.2.4}$$

т.е. комбинация $y_t + My$ также удовлетворяет уравнению (1.2.3), но не обязана быть нулем. В то же время, уравнение

$$y_t = -My \tag{1.2.5}$$

совместно с уравнением (1.2.3) в силу (1.1.4). Здесь уместно подчеркнуть, что совместность уравнений означает лишь наличие их общего решения, но отнюдь не то, что каждое решение одного из них будет решением и другого.

Итак мы на некоторое время опускаем явную зависимость от t и приступаем к исследованию спектральной задачи на всей оси ($-\infty < x < +\infty$) для вещественного, ($u(x) \in \mathbb{R}$), непрерывного и убывающего при больших x ($u(x) \to 0$, $|x| \to \infty$) потенциала. Уравнение (1.2.3) с оператором (1.2.1) называется уравнением Штурма–Лиувилля. В то же время оно является одномерным стационарным уравнением Шредингера. Из стандартного курса квантовой механики известно, что непрерывный спектр этого уравнения лежит на положительной полуоси $\lambda \geq 0$ спектрального параметра и является двукратно вырожденным. Мы рассматриваем класс потенциалов

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx|u(x)|(1+|x|) < \infty\,, \tag{1.2.6}$$

причем всегда впредь мы будем использовать символ $\int$ в смысле $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}$. В дальнейшем мы будем получать некоторые результаты и при более жестком условии на потенциал:

$$u(x) = O\left(\frac{1}{x^{2+\epsilon}}\right) \quad \text{для некоторого } \epsilon > 0\,. \tag{1.2.7}$$

Нам будет также удобно далее обозначать спектральный параметр $\lambda = k^2$, так что уравнение (1.2.3) приобретает вид

$$-y_{xx} + u(x)y = k^2 y\,, \quad -\infty < x < +\infty\,, \tag{1.2.8}$$

при этом именно k мы будем называть спектральным параметром.

1.3 Решения Йоста

Пусть $k \in \mathbb{R}$. Введем два специальных решения уравнения (1.2.8), задав их асимптотиками на отрицательной и положительной бесконечностях, соответственно:

$$\varphi(x,k) = e^{-ikx} + o(1)\,, \quad x \to -\infty, \tag{1.3.1}$$

$$\psi(x,k) = e^{-ikx} + o(1)\,, \quad x \to +\infty\,. \tag{1.3.2}$$

Эти решения известны в литературе как **решения Йоста**. Иными словами, вводя вспомогательные функции

$$\chi_+(x,k) = e^{ikx}\varphi(x,k) \qquad \chi_-(x,k) = e^{ikx}\psi(x,k)\,, \tag{1.3.3}$$

имеем:

$$\lim_{x\to-\infty} \chi_+(x,k) = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} \chi_-(x,k) = 1. \tag{1.3.4}$$

Ввиду вещественности потенциала $u(x)$ и параметра k комплексно сопряженные функции $\overline{\varphi}(x,k)$ и $\overline{\psi}(x,k)$ также являются решениями уравнения (1.2.8). Причем в силу граничных условий (1.3.1), (1.3.2)

$$\overline{\varphi}(x,k) = \varphi(x,-k)\,, \quad \overline{\psi}(x,k) = \psi(x,-k)\,, \quad k \in \mathbb{R} \tag{1.3.5}$$

Чтобы убедиться в существовании всех введенных решений, заметим, что дифференциальное уравнение (1.2.8) совместно с граничными условиями (1.3.1) или (1.3.2), соответственно, эквивалентно интегральным уравнениям

$$\varphi(x,k) = e^{-ikx} + \int\limits_{-\infty}^{x} dx'\, \frac{\sin k(x-x')}{k}\, u(x')\varphi(x',k) \tag{1.3.6}$$

и

$$\psi(x,k) = e^{-ikx} - \int\limits_{x}^{+\infty} dx'\, \frac{\sin k(x-x')}{k}\, u(x')\psi(x',k)\,. \tag{1.3.7}$$

Эти уравнения принадлежат классу Вольтерра, а потому однозначно разрешимы при условии (1.2.6) на потенциал.

Функции, введенные в (1.3.3) удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$-\chi_{\pm,xx}(x,k) + 2ik\chi_{\pm,x} + u(x)\chi_{\pm} = 0\,, \tag{1.3.8}$$

а вместо (1.3.6) мы имеем

$$\chi_+(x,k) = 1 + \int_{-\infty}^{x} dx'\, \frac{e^{2ik(x-x')}-1}{2ik}\, u(x')\chi_+(x',k)\,. \tag{1.3.9}$$

Очевидно, что здесь можно продолжить на $k \in \mathbb{C}$, $\Im k \geq 0$, поскольку экспонента в подынтегральном выражении в этой области убывает. Аналогично,

$$\chi_-(x,k) = 1 - \int\limits_{x}^{+\infty} dx'\, \frac{e^{2ik(x-x')}-1}{2ik}\, u(x')\chi_-(x',k)\,, \tag{1.3.10}$$

что аналитично в $k \in \mathbb{C}$, $\Im k \leq 0$. Свойства этих функций дают следующие леммы.

Лемма 1.1 *(Фаддеев) Существует такая константа K, что:*

$$| \chi_+(x,k) - 1 | \leq K \frac{1}{|k|} \int\limits_{-\infty}^{x} dx' |u(x')| \,, \quad \Im k \geq 0 \tag{1.3.11}$$

$$| \chi_+(x,k) - 1 | \leq K \int\limits_{-\infty}^{x} dx' |x' u(x')| \,, \quad \Im k \geq 0$$

$$| \partial_x \chi_+(x,k) | \leq K \int\limits_{-\infty}^{x} dx' |u(x')| \,, \quad \Im k \geq 0$$

Кроме того, функция $\chi_{+,k}(x,k)$ непрерывно дифференцируема по $k \in \mathbb{C}$, $\Im k \geq 0$ за исключением, может быть, точки $k = 0$. При этом выполнена оценка:

$$| \partial_k \chi_+(x,k) | \leq \frac{K}{|k|} \,, \quad \Im k \geq 0 \tag{1.3.12}$$

Лемма 1.2 *Существует*

$$\lim_{x \to +\infty} \chi_+(x,k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int dy \chi_+(y,k) u(y) \tag{1.3.13}$$

Доказательство По предыдущей лемме $\chi_+(x,k)$ ограничена при всех $-\infty \leq x \leq +\infty$, $k \in \mathbb{C}$, $\Im k > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to +\infty} e^{2ikx} \int\limits_{-\infty}^{x} dy e^{-2iky} \chi_+(y,k) u(y) = \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\int\limits_{-\infty}^{x} dy e^{-2iky} \chi_+(y,k) u(y)}{e^{-2ikx}} = \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\chi_+(x,k) u(x)}{-2ik} = 0 \,, \end{aligned}$$

что доказывает (1.3.13) в силу (1.3.9).

Асимптотическое поведение решений Йоста по k. Интегральные уравнения (1.3.9) и (1.3.10) позволяют уточнить указанное в Лемме 1.1 асимптотическое поведение по k. Действительно, как уже говорилось, слагаемые с экспонентами убывают, а потому по (1.3.11):

$$\chi_+(x,k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int\limits_{-\infty}^{x} dx' u(x') + o\left(\frac{1}{k}\right) \,, \quad k \in \mathbb{C}, \quad \Im k > 0 \,. \tag{1.3.14}$$

Эта формула и ее аналог для χ_- позволяют восстановить потенциал $u(x)$ (точнее говоря, его первообразную) по известным решениям Йоста.

Укажем также обобщение на комплексный случай соотношений (1.3.5):

$$\begin{aligned}
&\overline{\varphi(x,k)} = \varphi(x,-\overline{k}) \,, && \Im k \geq 0 \,, \\
&\overline{\psi(x,k)} = \psi(x,-\overline{k}) \ , && \Im k \leq 0 \,,
\end{aligned} \tag{1.3.15}$$

которые следует из указанных свойств аналитичности в соответсвующих полуплоскостях. В частности отсюда следует, что при чисто мнимых $k = ip$, $\Im p = 0$ решения Йоста вещественны:

$$\begin{aligned}
&\Im\varphi(x,ip) = 0 \,, && p \geq 0 \,, \\
&\Im\psi(x,ip) = 0 \,, && p \leq 0 \,.
\end{aligned} \tag{1.3.16}$$

1.4 Матрица монодромии

Пары решений φ, $\overline{\varphi}$ и ψ, $\overline{\psi}$ линейно независимы при вещественных k, отличных от нуля. Действительно, пусть

$$W(f,g) = fg_x - f_x g \tag{1.4.1}$$

означает вронскиан функций f и g. Обращение вронскиана в ноль эквивалентно пропорциональности функций f и g. Хорошо известно (и тривиально проверить), что если f и g удовлетворяют уравнению (1.2.8), то

$$\partial_x W(f,g) = 0 \,. \tag{1.4.2}$$

таким образом для вычисления значений вронскианов решений Йоста можно воспользоваться их асимптотическим поведением (1.3.1) и (1.3.2), что дает

$$W(\varphi,\overline{\varphi}) = W(\psi,\overline{\psi}) = 2ik \,. \tag{1.4.3}$$

Итак при $k \neq 0$ решение φ линейно независимо от $\overline{\varphi}$ и аналогично для пары ψ, $\overline{\psi}$. Поскольку уравнение (1.2.8), как и всякое уравнение второго порядка, может иметь не более двух линейно независимых решений, то каждая из этих пар образует полный набор. Таким образом существует постоянная (т.е. не зависящая от x) **(приведенная) матрица монодромии** $T(k)$ такая, что

$$\begin{pmatrix} \varphi(x,k) \\ \overline{\varphi}(x,k) \end{pmatrix} = T(k) \begin{pmatrix} \psi(x,k) \\ \overline{\psi}(x,k) \end{pmatrix} \,, \quad k \in \mathbb{R} \,, \tag{1.4.4}$$

где

$$T(k) = \begin{pmatrix} a(k) & b(k) \\ \overline{b}(k) & \overline{a}(k) \end{pmatrix} \,, \tag{1.4.5}$$

где мы учли, что вторая строка в (1.4.4) является комплексно сопряженной к первой. Отметим, что в соответствии с предыдущим обсуждением точку $k = 0$ мы в дальнейшем рассмотрим отдельно. Первая строка равенства (1.4.4) имеет вид

$$\varphi(x,k) = a(k)\psi(x,k) + b(k)\overline{\psi}(x,k) \,, \quad k \in \mathbb{R} \,, \tag{1.4.6}$$

что ввиду (1.3.5), т.е. в силу вещественности потенциала $u(x)$, означает выполнение соотношений

$$\overline{a}(k) = a(-k) \,, \quad \overline{b}(k) = b(-k) \ , \quad k \in \mathbb{R} \tag{1.4.7}$$

для элементов матрицы монодромии. Эти элементы могут быть явно выражены через потенциалы и решения Йоста (Задача 2):

$$a(k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int dy e^{iky} \varphi(y,k) u(y) \equiv 1 - \frac{1}{2ik} \int dy \chi_+(y,k) u(y) \tag{1.4.8}$$

и

$$b(k) = \frac{1}{2ik} \int dy e^{-iky} \varphi(y,k) u(y) \,. \tag{1.4.9}$$

Ввиду доказанной ранее аналитичности χ_+ в области $\Im k > 0$, видно, что и функция $a(k)$ также аналитична в верхней полуплоскости и задается равенством (1.4.8) при $\Im k \geq 0$. Что касается функции $b(k)$, то она, вообще говоря, не продолжается с вещественной прямой $\Im k = 0$. Для ее продолжимости в комплексную область следует потребовать, например, чтобы потенциал $u(x)$ убывал с ростом x быстрее любой линейной экспоненты, что сильно сужает класс рассматриваемых потенциалов, а потому мы не будем накладывать это условие.

Отметим, что в силу (1.3.11)

$$a(k) = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right) , \quad k \to \infty \,, \quad \Im k > 0 \tag{1.4.10}$$

а в силу (1.3.13)

$$a(k) = \lim_{x \to +\infty} \chi_+(x,k) \tag{1.4.11}$$

Полученные выражения для функций $a(k)$ и $b(k)$ показывают, что в точке $k = 0$ обе они, вообще говоря, имеют полюсную особенность:

$$a(k) = \frac{ic}{k} + O(1) \,, \qquad b(k) = \frac{-ic}{k} + O(1) \,, \qquad k \to 0 \,. \tag{1.4.12}$$

Предел малых u. В первом порядке по потенциалу u элемент $b(k)$ матрицы монодромии переходит в преобразование Фурье потенциала, как следует из (1.4.9):

$$b(k) = \frac{1}{2ik} \int dy e^{-2iky} u(y) \; + O(u^2) \tag{1.4.13}$$

Элементы a и b матрицы монодромии не независимы. Действительно, подставляя (1.4.6) в первое равенство в (1.4.3), мы в силу второго равенства получаем унимодулярность матрицы монодромии

$$\det T(k) \equiv |a(k)|^2 - |b(k)|^2 = 1 \,, \quad k \in \mathbb{R} \,. \tag{1.4.14}$$

Тогда обратная матрица $T(k)^{-1}$ равна

$$T(k)^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{a}(k) & -b(k) \\ -\overline{b}(k) & a(k) \end{pmatrix} \tag{1.4.15}$$

а обращение равенства (1.4.6) имеет вид

$$\psi(x,k) = \overline{a}(k) \varphi(x,k) - b(k) \overline{\varphi}(x,k) \,, \quad k \in \mathbb{R} \,. \tag{1.4.16}$$

Отметим также, что в силу, например, равенств (1.4.6) и (1.4.3) элементы матрицы монодромии также могут быть выражены посредством соответствующих вронскианов:

$$a(k) = \frac{W(\varphi(x,k), \overline{\psi}(x,k))}{2ik}\,, \quad k \in \mathbb{C}\,, \Im k \geq 0\,, \tag{1.4.17}$$

$$b(k) = \frac{W(\varphi(x,k), \psi(x,k))}{-2ik}\,, \quad k \in \mathbb{R}\,. \tag{1.4.18}$$

Заметим, что равенство (1.4.17) дает еще одно доказательство аналитической продолжимости $a(k)$ в верхнюю полуплоскость. При этом, как обычно, мы понимаем $\overline{\psi}(x,k))$ как аналитическое продолжение функции комплексно сопряженной к ψ. Иными словами: $\overline{\psi}(x,k) \equiv \overline{\psi(x,\overline{k})}$.

данные рассеяния Таким образом естественно ввести величины

$$t(k) = \frac{1}{a(k)}\,, \quad r(k) = \frac{b(k)}{a(k)}\,, \tag{1.4.19}$$

называемые, соответственно, **коэффициентами прохождения и отражения**. Введенные величины не независимы. В силу (1.4.14):

$$|t(k)|^2 + |r(k)|^2 = 1\,, \tag{1.4.20}$$

а в силу (1.4.7):

$$\overline{t}(k) = t(-k)\,, \qquad \overline{r}(k) = r(-k)\,. \tag{1.4.21}$$

Выпонены, также, следующие свойства:

$$|r(k)| < 1\,, \quad k \neq 0\,, \tag{1.4.22}$$

$$r(k) = O\left(\frac{1}{k}\right)\,, \qquad |k| \to \infty\,, \tag{1.4.23}$$

$$\int dx(1+|x|)|B_x(x)| < \infty\,, \quad \text{где} \quad B(x) = \int dx e^{ikx} b(k)\,. \tag{1.4.24}$$

Отметим также, что в силу (1.4.14) и (1.4.19)

$$|a(k)|^2 = \frac{1}{1-|r(k)|^2} \tag{1.4.25}$$

2 Лекция 2

2.1 Дискретный спектр

Рассмотрим дискретный спектр:

$$Ly_n(x) = \lambda_n y_n(x)\,, \tag{2.1.1}$$

где $y_n(x) \not\equiv 0$ и $y_n(x) \in \mathcal{L}_2$:

$$\int dx |y_n(x)|^2 < \infty \tag{2.1.2}$$

Поскольку оператор L — самосопряженный, то все собственные значения вещественны. Действительно,

$$\lambda_n \int dx |y_n(x)|^2 = \int dx \overline{y_n(x)} L y_n(x) = \overline{\lambda}_n \int dx |y_n(x)|^2\,,$$

так что
$$\lambda_n = \overline{\lambda}_n \,. \tag{2.1.3}$$
Предположим, что $\lambda_n = k^2 \geq 0$. Тогда на одной из, как мы знаем, решения осциллируют на бесконечности как $\sim e^{ikx}$, а тем самым не принадлежат $\mathcal{L}_2$. Итак
$$\lambda_n = -\kappa_n^2, \tag{2.1.4}$$
причем для определенности будем считать, что
$$\kappa_n > 0. \tag{2.1.5}$$
Пусть $p \in \mathbb{R}$ и пусть $p > 0$. Как мы знаем:
$$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x, ip) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \psi(x, -ip) = 0. \tag{2.1.6}$$
На противоположных бесконечностях:
$$\varphi(x, ip) = a(ip)e^{px} + o(e^{px})\,, \quad p > 0\,, \quad x \to +\infty\,, \tag{2.1.7}$$
$$\psi(x, -ip) = a(-ip)e^{-px} + o(e^{-px})\,, \quad p > 0\,, \quad x \to -\infty\,. \tag{2.1.8}$$
Итак, для убывания одного из этих решений (а тогда и обоих) на обоих бесконечностях необходимо, чтобы
$$a(i\kappa_n) = 0\,. \tag{2.1.9}$$
Введем обозначения:
$$\varphi_n(x) = \varphi(x, i\kappa_n)\,, \quad \psi_n(x) = \overline{\psi}(x, i\kappa_n) = \psi(x, -i\kappa_n)\,. \tag{2.1.10}$$
Ввиду (2.1.9) это означает, что эти решения пропорциональны друг другу, т.е. существуют такие константы b_n, что
$$\varphi_n(x) = b_n\psi_n(x)\,, \tag{2.1.11}$$
причем в силу вещественности решений, эти константы также вещественны. Теперь по (2.1.11) мы видим, что условие (2.1.9) также и достаточно, чтобы $\varphi_n(x)$ или $\psi_n(x)$ были собственными функциями, поскольку они стремятся к нулю на противоположных бесконечностях:
$$\varphi_n(x) = \begin{cases} b_n e^{-\kappa_n x}, & x \to +\infty \\ e^{\kappa_n x}, & x \to -\infty \end{cases} \tag{2.1.12}$$
Равенство (2.1.9) определяет κ_n как условие существования убывающего решения уравнения
$$(L + \kappa_n^2)\varphi_n(x) = 0\,. \tag{2.1.13}$$
Все нули $a(k)$ простые (Задача 3).

2.2 Дисперсионное соотношение.

Введем
$$a_1(k) = a(k)\prod_{n=1}^{N}\frac{k + i\kappa_n}{k - i\kappa_n} \tag{2.2.1}$$

Функция $\ln a_1(k)$ аналитична в $\Im k > 0, \ln a_1(k) \to 0$, $|k| \to \infty$. Для $k \in \mathbb{R}$: $|a_1(k)| = |a(k)|$. Кроме того $\ln a_1(k) = \ln|a_1(k)| + i \arg a_1(k)$. Тогда, беря вещественную часть тождества

$$\int dk' \frac{\ln a_1(k')}{k' - k + i0} = 0\,,$$

так что

$$\arg a_1(k) = -\frac{1}{\pi}\wp \int dk' \frac{\ln|a_1(k')|}{k' - k}\,.$$

Таким образом:

$$a_1(k) = \exp\left\{\ln|a(k)| - \frac{i}{\pi}\wp \int dk' \frac{\ln|a(k')|}{k' - k}\right\}\,,$$

т.е.

$$a_1(k) = \exp\left\{\ln|a(k)| - \frac{i}{\pi}\wp \int dk' \frac{\ln|a(k')|}{k' - k} + i\pi\delta(k' - k)\right\}\,,$$

или

$$a_1(k) = \exp\left\{\ln|a(k)| - \frac{1}{\pi}\wp \int dk' \frac{\ln|a(k')|}{k' - k - i0}\right\}\,.$$

Значит

$$a(k) = \prod_{n=1}^{N} \frac{k - i\kappa_n}{k + i\kappa_n} \exp\left(\frac{i}{2\pi} \int dk' \frac{\ln(1 - |r(k')|^2)}{k' - k - i0}\right)\,, \qquad \Im k = 0\,, \tag{2.2.2}$$

или

$$a(k) = \prod_{n=1}^{N} \frac{k - i\kappa_n}{k + i\kappa_n} \exp\left(\frac{i}{2\pi} \int dk' \frac{\ln(1 - |r(k')|^2)}{k' - k}\right)\,, \qquad \Im k > 0\,. \tag{2.2.3}$$

Итак, $a(k)$ восстанавливается по $|r(k)|$ и набору $\kappa_1, \ldots, \kappa_N$. Теперь и $b(k)$ можно тоже восстановить по $r(k)$ и набору $\kappa_1, \ldots, \kappa_N$:

$$b(k) = r(k)a(k)\,. \tag{2.2.4}$$

Из дисперсионного соотношения следует много полезных фактов. Например, что $\Im(a(ip)) = 0$, поскольку

$$a(ip) = \prod_{n=1}^{N} \frac{p - \kappa_n}{p + \kappa_n} \exp\left\{\frac{p}{2\pi} \int dk' \frac{\ln(1 - |r(k')|^2)}{k'^2 + p^2}\right\}\,, \quad p > 0\,. \tag{2.2.5}$$

Удобно упорядочить собственные значения уравнения (2.1.1) так, чтобы

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_N, \tag{2.2.6}$$

так что по (2.1.4):

$$\kappa_1 > \kappa_2 > \ldots > \kappa_N. \tag{2.2.7}$$

Тогда из (2.2.5) имеем :

$$\operatorname{sgn} a(ip) = \begin{cases} +1, & p > \kappa_1, \\ (-1)^n, & \kappa_n > p > \kappa_{n+1}, \quad n = 1, \ldots, N-1, \\ (-1)^N, & \kappa_N > p. \end{cases} \tag{2.2.8}$$

Более того, для производной получаем, что

$$ia'(i\kappa_n) = \frac{1}{2\kappa_n} \prod_{\substack{m=1 \\ m\neq n}}^{N} \frac{\kappa_n - \kappa_m}{\kappa_n + \kappa_n} \exp\left\{ \frac{\kappa_n}{2\pi} \int dk' \frac{\ln(1 - |r(k')|^2)}{k'^2 + \kappa_n^2} \right\}, \tag{2.2.9}$$

так что

$$\operatorname{sgn}(ia'(i\kappa_n)) = (-1)^n . \tag{2.2.10}$$

Нули $a(\mathbf{k})$ простые (Задача 3) и как показано там

$$\operatorname{sgn}(ia'(i\kappa_n)) = \operatorname{sgn} b_n , \tag{2.2.11}$$

так что и

$$b_n = (-1)^{n-1}|b_n| . \tag{2.2.12}$$

2.3 Обратная задача: уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко

Введем вместо b_n новые переменные

$$\beta_n = \frac{b_n}{ia'(i\kappa_n)} > 0 , \qquad n = 1, \dots, N , \tag{2.3.1}$$

которые удобны тем, что они положительны. В качестве спектральных данных мы выбираем

$$S = \{r(k),\, \kappa_n,\, \beta_n,\, n = 1, \dots, N\} . \tag{2.3.2}$$

Как мы видели ранее, по ним однозначно восстанавливаются элементы матрицы монодромии $a(k)$, $b(k) = a(k)r(k)$ и $b_n = i\beta_n a'(i\kappa_n)$. Покажем, что по ним также однозначно восстанавливается и потенциал.

Потенциалы, которым отвечает нулевой коэффициент прохождения:

$$r(k) \equiv 0 , \tag{2.3.3}$$

называются **безотражательными**.

Введем

$$\mathcal{K}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int dk\, e^{iky} \psi(x, k), \tag{2.3.4}$$

так что

$$\psi(x, k) = \int dy \mathcal{K}(x, y) e^{-iky} . \tag{2.3.5}$$

Учитывая аналитичность и асимптотическое поведение $\psi(x, k)$ в нижней полуплоскости k, очевидно, что

$$\mathcal{K}(x, y) = \delta(x - y) + \theta(y - x) K(x, y), \tag{2.3.6}$$

где $K(x, y)$ – некоторая функция двух переменных, определенная лишь при $y \geq x$. Тогда для решения Йоста существует треугольное представление

$$\psi(x, k) = e^{-ikx} + \int_x^\infty dy K(x, y) e^{-iky} , \tag{2.3.7}$$

причем в силу (1.3.5)

$$\overline{K(x, y)} = K(x, y). \tag{2.3.8}$$

Интегральный оператор с ядром $\mathcal{K}(x,y)$ называется **оператором преобразования**, поскольку выражает решение Йоста, отвечающее рассматриваемому потенциалу, через экспоненту, т.е. решение Йоста, отвечающее нулевому потенциалу. Ввиду (1.4.19) перепишем (1.4.6) в виде

$$\psi(x,k) = \frac{\phi(x,k)}{a(k)} - r(k)\overline{\psi}(x,k) \tag{2.3.9}$$

и подставим это в (2.3.4). Тогда в силу (2.3.6) получаем при $y \geq x$:

$$K(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int dk\left(\frac{\phi(x,k)}{a(k)} - e^{-ikx}\right)e^{iky} - \frac{1}{2\pi}\int dk r(k)\overline{\psi}(x,k)e^{iky} =$$

(поскольку $y \geq x$, первый интеграл вычисляется посредством продолжения в верхнюю полуплоскость, где ϕ аналитична, а $a(k)$ имеет полюса. Тогда)

$$\begin{aligned} &= -\sum_{n=1}^{N}\frac{\phi(x,i\kappa_n)e^{-\kappa_n y}}{a'(i\kappa_n)} - \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ik(x+y)}r(k) - \\ &- \frac{1}{2\pi}\int_x^{+\infty} dz\, K(x,z)\int dk\, e^{ik(z+y)}r(k) \end{aligned}$$

Окончательно, в силу (2.1.11), (2.3.1) и (2.3.7) получаем

$$K(x,y) + F(x+y) + \int_x^{\infty} dz K(x,z)F(z+y) = 0\,, \tag{2.3.10}$$

где

$$F(x) = \sum_{n=1}^{N}\beta_n e^{-\kappa_n x} + \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx}r(k)\,. \tag{2.3.11}$$

Как следует из аналога (1.3.14) для ψ:

$$u(x) = \partial_x \lim_{k\to\infty} 2ik\big(1 - e^{ikx}\psi(x,k)\big), \tag{2.3.12}$$

так что по (2.3.7)

$$\begin{aligned} &2ik\big(1 - e^{ikx}\psi(x,k)\big) = -2ik\int_x^{\infty} dy K(x,y)e^{ik(x-y)} = \\ &= 2\int_x^{\infty} dy K(x,y)\frac{\partial e^{ik(x-y)}}{\partial y} = \\ &- 2\left(K(x,x) + \int_x^{\infty} dy K_y(x,y)e^{ik(x-y)}\right) \end{aligned}$$

и последнее слагаемое в пределе стремится к нулю, поскольку $\Im k < 0$. Итак,

$$u(x) = -2\partial_x K(x,x). \tag{2.3.13}$$

3 Лекция 3

3.1 Временна́я эволюция.

Итак, пусть, наконец, u зависит от t и удовлетворяет уравнению (1.1.2). Как мы видели, это эквивалентно выполнению представления Лакса (1.1.4), где оператор M определен в (1.2.3). Тогда, ввиду (1.2.4) и асимптотических условий (1.3.1) и (1.3.2), получаем:

$$\varphi_t(x,k) + M\varphi(x,k) = 4ik^3\varphi(x,k)\,, \tag{3.1.1}$$

$$\psi_t(x,k) + M\psi(x,k) = 4ik^3\psi(x,k)\,. \tag{3.1.2}$$

Далее, по (1.4.6), (3.1.1) и (3.1.2) находим, что

$$a_t\psi + b_t\overline{\psi} = 8ik^3b\overline{\psi}\,,$$

что дает эволюцию элементов матрицы монодромии:

$$a_t(k) = 0\,, \tag{3.1.3}$$

$$b_t(k) = 8ik^3b(k)\,, \tag{3.1.4}$$

так что из (2.1.9) следует, что

$$\partial_t\kappa_n = 0\,, \tag{3.1.5}$$

а из (2.1.11)

$$\partial_t b_n = 8\kappa_n^3 b_n\,. \tag{3.1.6}$$

Для временной эволюции спектральных данных получаем:

$$r_t(k) = 8ik^3r(k) \tag{3.1.7}$$

и

$$\partial_t\beta_n = 8\kappa_n^3\beta_n\,. \tag{3.1.8}$$

Итак при t отличном от нуля спектральные данные суть

$$S(t) = \left\{e^{8ik^3t}r(k)\,,\quad \kappa_n\,,\quad e^{8\kappa_n^3t}\beta_n\right\}\,. \tag{3.1.9}$$

Отметим, что в силу (3.1.7) и (3.1.5):

$$\partial_t|r(k)| = 0\,, \tag{3.1.10}$$

откуда следует (3.1.3) в силу (2.2.2).

3.2 Солитонные решения: $r \equiv 0$.

В этом случае (2.3.11) сводится к

$$F(x) = \sum_{n=1}^{N}\beta_n e^{-\kappa_n x}\,, \tag{3.2.1}$$

так что решение (2.3.10) следует искать в виде

$$K(x,y) = \sum_{n=1}^{N}\gamma_n(x)e^{-\kappa_n y}, \tag{3.2.2}$$

где функции $\gamma_n(x)$ следует опеределить. Таким образом уравнения обратной задачи в данном частном случае сводятся к системе **алгебраических** уравнений на функции γ_n. Действительно, вводя $N \times N$ матрицу

$$A_{n,m}(x) = \delta_{n,m} + \frac{e^{-(\kappa_n+\kappa_m)x}\beta_n}{\kappa_n + \kappa_m}\,, \tag{3.2.3}$$

мы записываем (2.3.10) в виде

$$\sum_{m=1}^{N} A_{n,m}\gamma_m = \beta_n e^{-\kappa_n x}\,.$$

Отсюда

$$\gamma_n = \frac{\det A^{(n)}}{\det A}\,, \tag{3.2.4}$$

где матрица $A^{(n)}$ получается из A заменой n-го столбца на столбец $\beta_n e^{-\kappa_n x}$. Подставляя (3.2.4) в (3.2.1), заметим что по правилу дифференцирования детерминантов: $\sum\limits_n e^{-\kappa_n x}\det A^{(n)} = \partial_x \det A$, так что окончательно для Nсолитонного решения получаем

$$u(x) = -2\partial_x^2 \ln\det A(x)\,. \tag{3.2.5}$$

Поскольку в (3.2.5) входит лишь вторая производная логарифма детерминанта матрицы A, то понятно, что преобразования матрицы, которые ведут к умножению ее на постоянную по x, или на линейную по x экспоненту не приводят к изменению потенциала. Будем обозначать преобразования матрицы A, которые сохраняют потенциал $u(x)$ знаком $\cong$. В частности, как легко видеть

$$A \cong \left\| \delta_{m,n} + \frac{2\kappa_n}{\kappa_m + \kappa_n} e^{-2\theta_n} \right\|\,, \tag{3.2.6}$$

где

$$\theta_n(t,x) = \kappa_n(x - q_n) - 4\kappa_n^3 t, \qquad \beta_n = 2\kappa e^{2\kappa_n q_n}. \tag{3.2.7}$$

Рассмотрим свойства введенных солитонных решений.

3.2.1 Односолитонное решение, $N = 1$.

В этом простейшем случае

$$\det A \equiv A = 1 + e^{-2\theta}, \tag{3.2.8}$$

поэтому

$$u(t,x) = -\frac{2\kappa^2}{\operatorname{ch}^2 \kappa(x - 4\kappa^2 t - q)}\,. \tag{3.2.9}$$

3.3 Двусолитонное решение, $N = 2$.

Пусть $\kappa_1 > \kappa_2$. В данном случае

$$\det A(t,x) = \begin{vmatrix} 1 + e^{-2\theta_1} & \dfrac{2\kappa_1 e^{-2\theta_1}}{\kappa_1+\kappa_2} \\ \dfrac{2\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2} e^{-2\theta_2} & 1 + e^{-2\theta_2} \end{vmatrix}\,, \tag{3.3.1}$$

так что

$$\det A = 1 + e^{-2\theta_1} + e^{-2\theta_2} + e^{-2\theta_1 - 2\theta_2 + \phi}\,. \tag{3.3.2}$$

где

$$\phi = \ln \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2}, \qquad \frac{\kappa_1}{\sqrt{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}} = \operatorname{ch}\frac{\phi}{2}, \qquad \frac{\kappa_2}{\sqrt{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}} = \operatorname{sh}\frac{\phi}{2}. \tag{3.3.3}$$

т.е. $\phi > 0$. По определению

$$\theta_2 = 4\kappa_2(\kappa_1^2 - \kappa_2^2)t + \frac{\kappa_2}{\kappa_1}\theta_1 + \kappa_2(q_1 - q_2), \tag{3.3.4}$$

так что при t стремящемся к бесконечности по крйней мере одна из θ должна тоже стремиться к бесконечности. Очевидно, что если мы идем к бесконечности на (x,t)-плоскости так, что обе θ'ы бесконечны, то $\det A(t,x)$ либо стремится к 1, либо растет как линейная экспонента x. В обоих случаях по (3.2.5) $u(t,x) \to 0$.

Рассмотрим поэтому случай, когда $(t,x) \to \infty$ так что либо θ_1, либо θ_2 конечны, т.е., соответственно, x сремится к бесконечности. Итак,

$$\text{если } \theta_1 \text{ конечна, то } \theta_2 \to \pm\infty \text{ при } t \to \pm\infty, \tag{3.3.5}$$

так что

$$\det A(t,x) \to \begin{cases} 1 + e^{-2\theta_1}, & \theta_2 \to +\infty \\ 1 + e^{-2(\theta_1 + \phi)}, & \theta_2 \to -\infty \end{cases}. \tag{3.3.6}$$

Аналогично,

$$\text{если } \theta_2 \text{ конечна, то } \theta_1 \to \mp\infty \text{ при } t \to \pm\infty\,. \tag{3.3.7}$$

$$\det A(t,x) \to \begin{cases} 1 + e^{-2\theta_2}, & \theta_1 \to +\infty \\ 1 + e^{-2(\theta_2 + \phi)}, & \theta_1 \to -\infty \end{cases}, \tag{3.3.8}$$

причем мы везде опустили множители выпадающие при подстановке в (3.2.5). Сравнивая с (3.2.8), мы видим, что во всех нетривиальных ситуациях мы имеем то же самое выражение с различными параметрами.

Суммируя, мы видим, что независимо от способа стремления

$$\text{при} \quad t \to -\infty: \quad u(t,x) \to -\frac{2\kappa_1^2}{\operatorname{ch}^2(\theta_1 + \phi)} - \frac{2\kappa_2^2}{\operatorname{ch}^2\theta_2}\,, \tag{3.3.9}$$

$$\text{при} \quad t \to +\infty: \quad u(t,x) \to -\frac{2\kappa_1^2}{\operatorname{ch}^2\theta_1} - \frac{2\kappa_2^2}{\operatorname{ch}^2(\theta_2 + \phi)}\,. \tag{3.3.10}$$

Это демонстрирует два замечательных свойства солитонных решений. Во-первых, каждое такое решение на обоих асимптотиках стремится к сумме односолитонных решений. Во-вторых, рассеяние солитонов упруго: оно сводится лишь к изменению фаз солитонов. На самом деле, легко показать, что оба указанных свойства имеют место и для общих решений, т.е. решений с ненулевым коэффициентом отражения. Иными словами, непрерывный спектр не дает вклада в рассеяние солитонов.

3.4 Интегралы движения.

Итак, как мы видели в (3.1.3) $a(k)$ не зависит от t, а соответственно, не зависят от времени и все его коэффициенты разложения в ряд по степеням $1/k$, при $k \to \infty$, $\Im k > 0$, см. (1.4.10). Разложение в этой точке выбирается не случайно: это единственная точка сингулярности уравнения (1.2.8), соответственно это единственная точка существенной особенности решений Йоста. Покажем, что благодаря этому коэффициенты такого разложения дают локальные полиномиальные интегралы движения, т.е. интегралы вида

$$I_n = \int P_n(u, u_x, u_{xx}, \ldots, u_x^{(m)})dx, \tag{3.4.1}$$

где все P_n суть полиномиальные функции своих аргументов. Здесь мы будем полагать, что потенциал бесконечно дифференцируем по x. Пусть k достаточно велико в верхней полуплскости, так что $\Im k > \max\{\kappa_1, \ldots, \kappa_N\}$. Тогда решение Йоста $\varphi(x,k)$ не имеет нулей и существует такая функция $\zeta(x', k)$, что оно может быть представлено в виде:

$$\varphi(x,k) = e^{-ikx + \int\limits_{-\infty}^{x} dx' \zeta(x',k)}. \tag{3.4.2}$$

В силу (1.4.11) имеем

$$\ln a(k) = \int dx \zeta(x,k), \tag{3.4.3}$$

а уравнение Штурма–Лиувилля (1.2.3) на $\varphi(x,k)$ сводится к уравнению Рикатти:

$$\zeta_x + \zeta^2 - u - 2ik\zeta = 0 \tag{3.4.4}$$

Будем искать решение этого уравнения в виде формального ряда по $1/k$:

$$\zeta(x,k) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\zeta_j(x)}{(2ik)^j}, \tag{3.4.5}$$

так что в силу $\overline{\zeta(x,k)} = \zeta(x, -\overline{k})$ все $\zeta_j(x)$ вещественны. Член порядка k^0 в (3.4.4) должен исчезать, что дает

$$\zeta_1(x) = -u(t,x), \tag{3.4.6}$$

и, приравнивая коэффициенты при старших степенях, получаем рекуррентные соотношения:

$$\zeta_{j+1}(x) = \partial_x \zeta_j(x) + \sum_{k=1}^{j-1} \zeta_k(x)\zeta_{j-k}(x), \quad j = 1, 2, \ldots \tag{3.4.7}$$

В частности:

$$\zeta_2(x) = -u_x, \quad \zeta_3(x) = -u_{xx} + u^2, \tag{3.4.8}$$

$$\zeta_4(x) = -u_{xxx} + 2\partial_x u^2, \tag{3.4.9}$$

$$\zeta_5(x) = -u_x^{(4)} + \partial_x^2 u^2 + u_x^2 + 2u_{xx}u - 2u^3 \tag{3.4.10}$$

Очевидно, что все $\zeta_j(x)$, получающиеся в результате этой рекуррентной процедуры являются полиномами от $u(x)$ и его производных по x. При этом все четные $\zeta_{2j}(x)$ оказываются полными производными, как показывают примеры $\zeta_2(x)$ и $\zeta_4(x)$. Действительно, воспользуемся тем, что при решении в виде формального рюда k можно брать вещественным и положим $\zeta = \zeta_{\Re} + i\zeta_{\Im}$. Тогда мнимая часть уравнения (3.4.4) сводится к

$$\partial_x \zeta_{\Im} + 2\zeta_{\Re}\zeta_{\Im} - 2k\zeta_{\Re} = 0, \tag{3.4.11}$$

так что

$$\zeta_{\Re} = -\frac{1}{2}\partial_x \ln(\zeta_{\Im} - k). \tag{3.4.12}$$

Поэтому интегралы от четных $\zeta_{2j}(x)$ по всей оси зануляются. Обозначим:

$$I_{j-1} = \frac{1}{2}\int dx \zeta_{2j+1}(x)\,, \quad j = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.4.13}$$

В силу (3.4.2), (3.4.3) и (3.4.5) мы получили разложение в формальный ряд

$$\ln a(k) = \sum_{j=-1}^{\infty} \frac{2I_j}{(2ik)^{2j+3}}, \tag{3.4.14}$$

где каждый I_j является полиномиальным, локальным интегралов движения. По (3.4.6), (3.4.8), (3.4.9) и (3.4.10) младшие интегралы имеют вид:

$$I_{-1} = \frac{-1}{2}\int dx u(t,x)\,, \quad I_0 = \frac{1}{2}\int dx u^2(t,x)\,, \tag{3.4.15}$$

$$I_1 = \frac{-1}{2}\int dx\left(u_x^2 + 2u^3\right)\,, \tag{3.4.16}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int dx\left(u_{xx}^2 - 5u^2 u_{xx} + 5u^4\right)\,. \tag{3.4.17}$$

С другой стороны, по дисперсионному соотношению (2.2.3)

$$\ln a(k) = \sum_{n=1}^{N} \ln\frac{k - i\kappa_n}{k + i\kappa_n} + \frac{i}{2\pi}\int dk' \frac{\ln(1 - |r(k')|^2)}{k' - k}\,, \quad \Im k > 0, \tag{3.4.18}$$

что разлагается в асимптотический ряд, если $r(k)$ спадает на бесконечности быстрее любой степени k. Учитывая, что $|r(-k)| = |r(k)|$, получаем

$$\ln a(k) = \sum_{j=-1}^{\infty} \frac{i}{k^{2j+3}}\left\{\frac{2(-1)^j}{2j+3}\sum_{n=1}^{N}\kappa_n^{2j+3} - \frac{1}{\pi}\int dk k^{2(j+1)}\ln(1 - |r(k)|^2)\right\}, \tag{3.4.19}$$

так что по (3.4.14) мы получаем явные (не рекуррентные!) выражения интегралов движения через данные рассеяния:

$$I_j = \frac{2^{2j+3}(-1)^j}{2j+3}\sum_{n=1}^{N}\kappa_n^{2j+3} + (-1)^j\frac{2^{2(j+1)}}{\pi}\int dk k^{2(j+1)}\ln(1 - |r(k)|^2). \tag{3.4.20}$$

Как и следовало ожидать, сюда входят только $|r(k)|$ и κ_n. Отметим, что гамильтониан уравнения КдФ есть

$$H = -I_1 \equiv = \int dx\left(\frac{1}{2}u_x^2 + u^3\right) == \frac{-32}{5}\sum_{n=1}^{N}\kappa_n^5 + \frac{16}{\pi}\int dk k^4 \ln(1 - |r(k)|^2). \tag{3.4.21}$$

Он задает динамику КдФ посредством

$$u_t = \{u, H\} = \partial_x \frac{\delta H}{\delta u(x)} = \partial_x\left(3u^2 - u_{xx}\right)\,, \tag{3.4.22}$$

скобка Пуассона – скобка Гарднера

$$\{F(u), G(u)\} = \int dx \frac{\delta F}{\delta u(x)}\partial_x \frac{\delta G}{\delta u(x)} \tag{3.4.23}$$

Отсюда, в частности,

$$\{u(x), u(y)\} = \delta'(x-y), \tag{3.4.24}$$

и мы приняли во внимание, что

$$\frac{\delta H}{\delta u(x)} = 3u^2 - u_{xx}. \tag{3.4.25}$$

Старшие интегралы порождают старшие уравнения иерархии КдФ. Задаваемые ими потоки взаимно коммутируют.

4 Задачи

Задача 1 *Доказать, что уравнение Лакса* $L_t = [L, M]$, *где* $L = -\partial_x^2 + u(t,x)$, $M = 4\partial_x^3 - 6u(t,x)\partial_x - 3u_x(t,x)$ *эквивалентно уравнению КдФ:* $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$.

Задача 2 *Пусть* $a(k)$ *и* $b(k)$ *- элементы матрицы матрицы монодромии:* $\varphi(x,k) = a(k)\psi(x,k) + b(k)\overline{\psi}(x,k)$, *где* $k \in \mathbb{R}$, *а* $\varphi(x,k)$ *и* $\psi(x,k)$ *– решения Йоста уравнения Штурма–Лиувилля с потенциалом* $u(x)$, *нормированные на* e^{-ikx} *при* $x \to -\infty$ *и* $x \to +\infty$, *соответственно. Доказать, что справедливы равенства*

$$a(k) = 1 - \frac{1}{2ik}\int dy e^{iky}\varphi(y,k)u(y), \qquad b(k) = \frac{1}{2ik}\int dy e^{-iky}\varphi(y,k)u(y)\,.$$

Задача 3 *Доказать, что все нули функции* $a(k)$, $k \in \mathbb{C}$, *простые.*

Задача 4 *Показать, что*

$$I_{-1} = \frac{-1}{2}\int dx u(t,x), \qquad I_0 = \frac{1}{2}\int dx u^2(t,x),$$
$$I_1 = \frac{-1}{2}\int dx \left(u_x^2 + 2u^3\right),$$

суть интегралы движения уравнения КдФ, $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$.