

Зачет по группам и алгебрам Ли

Вариант 1

Каждая задача оценивается в 2 балла. Время на выполнение работы 3 часа. Удачи!

1. Докажите, что группа комплексных линейных преобразований \mathbb{C}^n , сохраняющих ненулевой вектор и содержащее его $n - 1$ -мерное подпространство, является группой Ли, и найдите ее размерность.
2. Найдите число связных компонент и фундаментальную группу группы Ли ортогональных вещественных 5×5 -матриц, сохраняющих данное 2-мерное подпространство и имеющих единичный определитель.
3. Найдите все (с точностью до изоморфизма) связные группы Ли, касательная алгебра которых есть вещественная 3-мерная алгебра Гейзенберга.
4. Кососимметричная операция на трехмерном комплексном пространстве задана в базисе $\{x_1, x_2, x_3\}$ следующим образом:

$$[x_1, x_2] = 0, [x_1, x_3] = x_1 + x_2, [x_2, x_3] = -x_2 - 5x_1.$$

Докажите, что эта операция удовлетворяет тождеству Якоби. Найдите все идеалы в этой алгебре Ли.

5. Пусть V_n – $n+1$ -мерное неприводимое комплексное представление группы Ли $SL_2(\mathbb{C})$. Разложите в прямую сумму неприводимых представлений $S^2(V_1 \oplus V_1)$ группы Ли $SL_2(\mathbb{C})$.
6. Опишите все 5-мерные комплексные представления группы Ли $SU_2 \times SO_3(\mathbb{R})$ с точностью до изоморфизма.
7. Существует ли у группы Ли всех комплексных аффинных преобразований \mathbb{C}^2 точное комплексное представление верхнетреугольными матрицами?

Зачет по группам и алгебрам Ли

Вариант 2

Каждая задача оценивается в 2 балла. Время на выполнение работы 3 часа. Удачи!

1. Докажите, что группа линейных преобразований \mathbb{R}^n , сохраняющих данное 2-мерное подпространство и имеющих единичный определитель, является группой Ли, и найдите ее размерность.
2. Найдите число связных компонент и фундаментальную группу группы Ли вещественных ортогональных 5×5 -матриц, сохраняющих ненулевой вектор и содержащее его 3-мерное подпространство.
3. Найдите все (с точностью до изоморфизма) связные группы Ли, касательная алгебра которых есть вещественная 2-мерная неабелева алгебра Ли.
4. Кососимметричная операция на трехмерном комплексном пространстве задана в базисе $\{x_1, x_2, x_3\}$ следующим образом:

$$[x_1, x_2] = x_1 - x_3, [x_1, x_3] = x_1 - x_2, [x_2, x_3] = x_3 - x_2.$$

Докажите, что эта операция удовлетворяет тождеству Якоби. Найдите все идеалы в этой алгебре Ли.

5. Пусть V_n – $n+1$ -мерное неприводимое комплексное представление группы Ли $SL_2(\mathbb{C})$. Разложите в прямую сумму неприводимых представлений $\Lambda^2(V_1 \oplus V_1)$ группы Ли $SL_2(\mathbb{C})$.
6. Опишите все 6-мерные комплексные представления группы Ли $SO_3(\mathbb{C}) \times SO_3(\mathbb{C})$ с точностью до изоморфизма.
7. Существует ли у группы Ли всех движений вещественной плоскости точное комплексное представление верхнетреугольными матрицами?