Кольца и идеалы

Правила игры. Для получения максимальной оценки за листок достаточно решить либо 75% задач без звёздочек, либо 75% задач без кружочков.

Все кольца в этом листке предполагаются ассоциативными, коммутативными и с единицей. Подмножество B кольца A называется подкольцом, если B является кольцом относительно тех же операций. Через K обозначается произвольное поле.

Определение. Пусть A и B — коммутативные кольца с единицей. Отображение $f\colon A \to B$ называется *гомоморфизмом* колец, если $\forall a, a' \in A$ $f(a + a') = f(a) + f(a')$ и $f(aa') = f(a)f(a')$. Для гомоморфизма f определяются множества $\operatorname{Ker} f = \{x \in A, \quad f(x) = 0\}$, называемое *ядром* f, и $\operatorname{Im} f = \{y \in S, \quad \exists x \in R,$ такой, что $y = f(x)\}$, называемое *образом* f.

Пусть A — кольцо. Подмножество $I \subset A$ называется *идеалом*, если $\forall x, y \in I \quad x + y \in I$, $-x \in I$ и $\forall a \in A \quad ax \in I$.

♢ **11.1°. а)** Докажите, что образ гомоморфизма — всегда подкольцо.

б) Докажите, что ядро гомоморфизма всегда является идеалом.

♢ **11.2°. а)** Докажите, что если идеал I кольца A содержит обратимый элемент, то $I = A$.

б) Докажите, что кольцо A является полем тогда и только тогда, когда в нем нет нетривиальных идеалов (т.е. отличных от нулевого и A).

♢ **11.3°. а)** Пусть a — некоторый фиксированный элемент кольца A. Докажите, что множество $\{ax, \quad x \in A\}$ является идеалом в A. Такой идеал называется *главным* идеалом, порожденным элементом a, и обозначается (a).

б) Пусть $a_1, \ldots a_n$ — некоторый фиксированный набор элементов кольца R. Докажите, что множество $\{a_1x_1 + \ldots + a_nx_n, \quad x_1 \ldots x_n \in R\}$ является идеалом в R. Такой идеал называется идеалом, *порожденным элементами* $a_1, \ldots a_n$ и обозначается $(a_1, \ldots a_n)$.

♢ **11.4.** Кольцо, все идеалы в котором являются главными, называется *кольцом главных идеалов*. Докажите, что следующие кольца являются кольцами главных идеалов:

а°) $\mathbb{Z}$; **б°)** $K[x]$; **в) (гауссовы целые числа)** $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi, \quad a, b \in \mathbb{Z}\}$ **г) (эйзенштейновы целые числа)** $\mathbb{Z}[\varepsilon] = \{a + b\varepsilon, \quad a, b \in \mathbb{Z}\}$, где $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

♢ **11.5.** Докажите, что следующие кольца *не* являются кольцами главных идеалов:

а) $K[x, y]$; **б)** $\mathbb{Z}[x]$; **в)** $\mathbb{Z} = \{a + b\sqrt{5}, \quad a, b \in \mathbb{Z}\}$.

♢ **11.6.** Докажите, что в любом кольце множество нильпотентных элементов образует идеал. Этот идеал называется *нильрадикалом* кольца.

♢ **11.7.** Перечислите все идеалы **а°)** в $\mathbb{Z}_n$; **б)** в $K[[x]]$.

♢ **11.8.** Верно ли, что любой идеал в прямой сумме колец $A \oplus B$ имеет вид $I \oplus J$, где I — некоторый идеал в A, а J — некоторый идеал в B?

♢ **11.9. а)** Пусть $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_m \supset \ldots$ — убывающая последовательность идеалов кольца A. Докажите, что $\bigcap_{m=1}^{\infty} I_m$ является идеалом. Приведите пример, когда $\bigcap_{m=1}^{\infty} I_m = \{0\}$, хотя все I_m ненулевые.

б) Пусть $I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset I_m \subset \ldots$ — возрастающая последовательность идеалов кольца A. Докажите, что $\bigcup_{m=1}^{\infty} I_m$ является идеалом. Докажите, что все I_m не совпадают с A, то $\bigcup_{m=1}^{\infty} I_m$ тоже не совпадает с A.

в) Идеал называется *максимальным* если он не содержится ни в каком другом идеале, отличном от A. С помощью леммы Цорна докажите, что в любом кольце существуют максимальные идеалы, и что любой идеал, отличный от A, содержится в некотором максимальном.

Определение. Пусть A — кольцо, $I \subset A$ — идеал, $a \in A$ — некоторый фиксированный элемент кольца A. Множество $a + I = \{a + b, \quad b \in I\}$ называется *смежным классом* по идеалу I.

◊ **11.10°. а)** Докажите, что два смежных класса $a+I$ и $b+I$ либо не пересекаются, либо совпадают, причем совпадение равносильно тому, что $a-b \in I$.

б) Докажите, что формулы $(a+I)+(b+I)=(a+b)+I$ и $(a+I)\cdot(b+I)=ab+I$ определяют на множестве смежных классов структуру коммутативного кольца с единицей. Оно называется *факторкольцом* кольца A по идеалу I и обозначается A/I.

в) Докажите, что отображение $\pi\colon A \to A/I$, заданное формулой $\pi(a)=a+I$, является сюръективным гомоморфизмом, причем $\operatorname{Ker}\pi = I$. Гомоморфизм π называется *каноническим гомоморфизмом.*

г) Докажите, что имеется взаимно-однозначное соответствие между идеалами кольца A/I и идеалами кольца R, содержащими I.

◊ **11.11° (Теорема о гомоморфизме).** Пусть $f\colon A\to B$ — гомоморфизм колец.

а) Пусть $a \in A$. Докажите, что множество $\{x\in A,\quad f(x)=f(a)\}$ совпадает со смежным классом $a+\operatorname{Ker} f$.

б) Докажите, что $\operatorname{Im} f \cong R/\operatorname{Ker} f$.

в) Определим гомоморфизм $\bar f\colon A/\operatorname{Ker} f \to B$ формулой $\bar f(a+\operatorname{Ker} f)=f(a)$. Докажите, что это определение корректно (т.е. не зависит от выбора элемента a, определяющего смежный класс $a+\operatorname{Ker} f$), причем $\bar f$ является инъективным гомоморфизмом.

г) Докажите, что $f=\bar f\circ\varphi$, где φ — канонический гомоморфизм $\varphi\colon A\to A/\operatorname{Ker} f$.

◊ **11.12°.** Докажите, что: **а)** $\mathbb{Z}/(n)\cong\mathbb{Z}_n$; **б)** $K[x]/(x-a)\cong K$.

◊ **11.13°.** Докажите, что если N — нильрадикал (см. ◊ 11.6) кольца A, то факторкольцо A/N не содержит ненулевых нильпотентов.

◊ **11.14.** Докажите, что идеал I кольца A максимален тогда и только тогда, когда A/I — поле.

◊ **11.15.** Пусть V — линейное пространство над полем K, $g\colon V\to V$ — линейный оператор, $K[g]=\{a_0g^n+a_1g^{n-1}+\ldots+a_{n-1}g+a_n\mathrm{Id}_V,\quad a_0,a_1,\ldots,a_{n-1},a_n\in K\}$, $P_g(t)$ — минимальный многочлен оператора g. Докажите, что $K[g]\simeq K[t]/(P_g(t))$.

◊ **11.16.** Пусть $P(t)=t^n+a_1t^{n-1}+\ldots+a_{n-1}t+a_n\in K[t]$ — фиксированный многочлен, $I=(P(t))$ — главный идеал, порожденный многочленом $P(t)$.

а) Докажите, что в любом смежном классе $Q(t)+I$ содержится единственный многочлен, степень которого меньше n.

б) Докажите, что факторкольцо $K[t]/(P(t))$ представляет собой n-мерное линейное пространство над K с базисом $1=\alpha^0,\alpha,\alpha^2,\ldots,\alpha^{n-1}$, умножение в котором задается обычным правилом действия со степенями $\alpha^k\cdot\alpha^m=\alpha^{k+m}$ и "правилом понижения степени" $\alpha^n=-(a_1\alpha^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\alpha+a_n)$.

◊ **11.17°.** Докажите, что: **а)** $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)\cong\mathbb{C}$; **б)** $\mathbb{R}[x]/(x^2-1)\cong\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; **в)** $\mathbb{C}[x]/(x^2+1)\cong\mathbb{C}\times\mathbb{C}$; **г)** $\mathbb{Z}[x]/(x-a)\cong\mathbb{Z}$ (здесь $a\in\mathbb{Z}$); **д)** $\mathbb{Z}[x]/(2)\cong\mathbb{Z}_2[x]$; **е)** $\mathbb{Z}[x]/(2,x)\cong\mathbb{Z}_2$

◊ **11.18.** Докажите, что если $x^2+px+q\in\mathbb{R}[x]$ — квадратный трехчлен с отрицательным дискриминантом, то $\mathbb{R}[x]/(x^2+px+q)\cong\mathbb{C}$.

◊ **11.19.** Докажите, что кольца $\mathbb{Q}[x]/(x^2+1)$ и $\mathbb{Q}[x]/(x^2-2)$ являются полями, и что они не изоморфны.

◊ **11.20.** Докажите, что $K[x]/(P(x))$ является полем тогда и только тогда, когда многочлен $P(x)$ неприводим (т.е. не разлагается в произведение многочленов меньшей степени над K).

◊ **11.21. а)** Докажите, что если $a,b\in K$, $a\neq b$, то $K[x]/((x-a)(x-b))\cong K\times K$.

б) Докажите, что $K[x]/((x-a)^2)\cong K[x]/(x^2)$, причем это кольцо нельзя представить в виде прямого произведения других колец. Найдите все идеалы в этом кольце.

◊ **11.22.** Перечислите все неприводимые многочлены степени n над $\mathbb{F}_p$

а) для $n=3$ и $p=2$; **б)** для $n=2$ и $p=3$; **в)** для $n=4$ и $p=2$.

◊ **11.23.** Используйте полученные в предыдущей задаче многочлены для явного описания в духе задачи ◊ 11.16 полей, содержащих, соответственно, 9, 8 и 16 элементов. Докажите, что поля, полученные в каждом из пунктов а), б) и в) при помощи разных многочленов, изоморфны.

◊ **11.24***. Перечислите с точностью до изоморфизма все двумерные коммутативные алгебры над $\mathbb{C}$ **а)** с единицей; **б)** не обязательно с единицей.

◊ **11.25***. Перечислите с точностью до изоморфизма все двумерные коммутативные алгебры над $\mathbb{R}$ **а)** с единицей; **б)** не обязательно с единицей.

◊ **11.26***. Докажите, что любое кольцо, заключённое между кольцом главных идеалов A и его полем частных, само является кольцом главных идеалов.

◊ **11.27***. Верно ли, что конечное коммутативное кольцо без делителей нуля всегда является полем?

◊ **11.28***. Докажите, что: **а)** $\mathbb{Z}[i]/(2)$ не является полем;

б) $\mathbb{Z}[i]/(3)$ является полем из девяти элементов;

в) $\mathbb{Z}[i]/(n)$ является полем тогда и только тогда, когда $n \in \mathbb{N}$ — простое число, не равное сумме квадратов двух целых чисел.

◊ **11.29***. Докажите, что кольцо $\mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ не изоморфно $\mathbb{C}[x]$, но его поле частных изоморфно $\mathbb{C}(x)$.

Указание. Синус и косинус рационально выражаются через тангенс половинного угла.

◊ **11.30***. Пусть $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ — алгебра многочленов. Предположим, что $f_1,\ldots,f_n \in \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$. Докажите, что

а) Отображение φ, при котором $\varphi(g(x_1,\ldots,x_n)) \mapsto g(f_1,\ldots,f_n)$, является эндоморфизмом (гомоморфизмом в себя) $\mathbb{C}$-алгебры $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$.

б) Если при этом φ — автоморфизм (т.е. взаимно-однозначное отображение), то *якобиан*

$$J = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$$

является ненулевой константой.

в) Если $h = h(x_2,\ldots,x_n)$, то отображение Ψ, при котором

$$\Psi(g(x_1,\ldots,x_n)) = g(x_1+h, x_2,\ldots,x_n)$$

является автоморфизмом алгебры $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$.

◊ **11.31***. Пусть $\mathbb{C}[[x_1,\ldots,x_n]]$ — алгебра формальных степенных рядов. Предположим, что $f_1,\ldots,f_n \in \mathbb{C}[[x_1,\ldots,x_n]]$ обратимы (т.е. имеют ненулевые свободные члены). Докажите, что

а) Отображение φ, при котором $\varphi(g(x_1,\ldots,x_n)) \mapsto g(f_1,\ldots,f_n)$, является эндоморфизмом $\mathbb{C}$-алгебры $\mathbb{C}[[x_1,\ldots,x_n]]$.

б) φ — автоморфизм тогда и только тогда, когда якобиан

$$J = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$$

имеет ненулевой свободный член.

Предупреждение. Не пытайтесь решить задачу, обратную к задаче ◊ 11.30б). Это может привести к моральной травме.