Задачи по группам и алгебрам Ли – 5

Задача без звездочки (со всеми пунктами) оценивается в 1 балл, задача со звездочкой – в 2 балла. Оценка за листок есть максимум из суммы баллов за задачи без звездочки и суммы баллов за задачи со звездочкой. Таким образом, для получения оценки 10 за листок надо решить либо все задачи без звездочки, либо все задачи со звездочкой.

1. Покажите, что всякое дифференцирование алгебры Ли $\mathfrak{g}$ единственным образом продолжается до дифференцирования универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$.

2. Покажите, что в любом неприводимом комплексном представлении алгебры Ли $\mathfrak{g}$ все элементы центра универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ действуют скалярными операторами. *Указание:* вспомните лемму Шура.

3. Докажите, что алгебра дифференциальных операторов на связной группе Ли G, инвариантных относительно левого и правого действий группы G, изоморфна центру соответствующей универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$.

4. Пусть e, f, h – стандартные образующие алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, такие, что
$$[e,f]=h,\ [h,e]=2e,\ [h,f]=-2f.$$
Докажите, что элемент $C = ef + fe + \frac{1}{2}h^2$ (называемый *элементом Казимира*) лежит в центре универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$. *Указание:* элемент лежит в центре $U(\mathfrak{g})$, если и только если он
коммутирует со всеми элементами *алгебры Ли* $\mathfrak{g}$.

5. а) Докажите, что любой элемент алгебры $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации элементов $e^ih^jC^k$ или $f^ih^jC^k$, где i, j, k – целые неотрицательные числа. **б)** Докажите, что центр алгебры $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ порожден элементом C.

6. Согласно задаче 2, элемент Казимира $C \in U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ действует скаляром в каждом неприводимом представлении алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Найдите этот скаляр для неприводимого $n+1$-мерного представления V_n.

7. Найдите центр универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$, если **а)** $\mathfrak{g}$ – 2-мерная неабелева алгебра Ли; **б)** $\mathfrak{g}$ – 3-мерная алгебра Гейзенберга.

8. Вычислите когомологии алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

9. а) Докажите, что дифференциал в комплексе Шевалле алгебры Ли $\mathfrak{g}$ коммутирует с присоединенным действием алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на $\Lambda^*(\mathfrak{g}^*)$. *Указание:* алгебра Ли $\mathfrak{g}$ действует на комплексе левоинвариантных форм посредством производной Ли вдоль левоинвариантных векторных полей. **б)** Таким образом, ядро и образ дифференциала, а также когомологии являются представлениями алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

10. Докажите, что представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве своих когомологий тривиально.

11*. а) Докажите, что алгебра $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))/(C-\lambda)$ проста при общих значениях $\lambda \in \mathbb{C}$ (здесь C – элемент Казимира, см. задачу 4). **б)** Укажите какой-нибудь простой фактор этой алгебры при каждом значении $\lambda \in \mathbb{C}$.

12*. а) Докажите, что пучок векторных полей на $\mathbb{CP}^1$ есть $\mathcal{O}(2)$. **б)** Докажите, что алгебра Ли глобальных сечений этого пучка изоморфна $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

13*. а) Из предыдущей задачи следует, что имеется гомоморфизм из алгебры $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ в алгебру глобальных дифференциальных операторов на $\mathbb{CP}^1$, переводящий алгебру Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ в глобальные векторные поля. Найдите ядро этого гомоморфизма. **б)** Докажите, что этот гомоморфизм сюръективен.

14*. Докажите, что $H^2(G,\mathbb{C}) = 0$ для односвязной компактной группы Ли G.

15*. Вычислите кольцо когомологий де Рама однородного пространства группы Гейзенберга вещественных унитреугольных матриц 3×3 по подгруппе *целочисленных* унитреугольных матриц 3×3.