

Математические основы естествознания

Статистическая физика

Листок СФ-1. Статистическое описание систем с большим числом степеней свободы

Обязательные задачи: 1а, 2, 3, 4а, 4б, 5а.

1. Случайная переменная u принимает значения u_i с вероятностями p_i . Ее среднее значение (математическое ожидание) определяется как $\langle u \rangle = \sum_i p_i u_i$. Доказать, что

а) $\langle u^2 \rangle \geq (\langle u \rangle)^2$;

б) $\langle u^{n+1} \rangle \langle u^{n-1} \rangle \geq (\langle u^n \rangle)^2$ для любого нечетного n .

В каких случаях достигается равенство?

2. С помощью формулы Стирлинга найти асимптотическое выражение для биномиального коэффициента C_{2N}^{N-n} при большом N и $n \ll N$.
3. Симметричную монету бросают 800 раз. Найти вероятность того, что орел выпадет 420 раз. Ответ представить в виде десятичной дроби с точностью до двух знаков после запятой.
4. Рассмотрим идеальный газ из N молекул, находящийся в равновесном состоянии в сосуде объемом V_0 . Вероятность того, что данная молекула находится в части объема V , равна V/V_0 . Пусть n – число молекул в части объема V .

а) Найти среднее число молекул $\langle n \rangle$ в части объема V .

б) Найти стандартное отклонение числа молекул Δn в части объема V .

5. Рассмотрим модельную систему большого числа N невзаимодействующих друг с другом магнитных моментов в магнитном поле H . Каждый момент может быть направлен либо в направлении поля (в этом случае его энергия равна $-H$), либо против поля (энергия такого момента равна $+H$). Пусть полная энергия системы фиксирована и равна $E = -2mH$, $0 \leq m \leq \frac{1}{2} N$.

а) Пользуясь статистическим определением абсолютной температуры, найти температуру T данной системы;

б) Показать, что вероятность того, что отдельно взятый момент в такой системе направлен по полю, равна

$$P_{\uparrow} = \frac{e^{H/T}}{e^{H/T} + e^{-H/T}}$$

и найти среднее значение и дисперсию энергии одного магнитного момента (ответ выразить через m , N и H).

6. Взяв за основу статистические определения энтропии и температуры, показать, что при тепловом контакте тело с более высокой температурой отдает энергию, а с более низкой – получает.