"Спецфункции". Лекция 9.

Гипергеометрическая функция

1. Гипергеометрический ряд $F_{p,q}(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;z)$ определяется как степенной ряд вида $F_{p,q}(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;z)=1+\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{(a_1)_n\cdots(a_p)_n}{(b_1)_n\cdots(b_q)_n}\dfrac{z^n}{n!}$, где

$(a)_n=a(a+1)\cdots(a+n-1)=\dfrac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$, $(a)_0=1$ - символ Похгаммера. Найдем область сходимости гипергеометрического ряда. Предел отношения двух последовательных членов ряда равен

$$\lim_{n\to\infty} z\frac{(a_1+n)\cdots(a_p+n)}{(n+1)(b_1+n)\cdots(b_q+n)}=\lim_{n\to\infty} zn^{p-q-1}\frac{(1+\frac{a_1}{n})\cdots(1+\frac{a_p}{n})}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{b_1}{n})\cdots(1+\frac{b_q}{n})}=\lim_{n\to\infty} zn^{p-q-1}.$$

Это говорит о том, что при $p<q+1$ гипергеометрический ряд сходится при любом z, при $p<q+1$ гипергеометрический ряд всюду расходится, а при $p=q+1$ сходится при $|z|<1$ и расходится при $|z|>1$.

Пусть теперь $p=q+1$. Исследуем сходимость гипергеометрического ряда на границе области сходимости $|z|=1$. Для этого потребуется более точная оценка коэффициента $F_n=\dfrac{(a_1)_n\cdots(a_p)_n}{n!(b_1)_n\cdots(b_q)_n}$ гипергеометрического ряда при z^n. Утверждается, что при $n\to\infty$

$$F_n\sim\frac{\prod_i\Gamma(b_i)}{\prod_j\Gamma(a_j)}n^{\sum_j a_j-\sum_i b_i-1}\qquad\qquad (p=q+1). \tag{1}$$

Для доказательства представим коэффициент F_n в виде произведения

$$F_n=\frac{\prod_i\Gamma(b_i)}{\prod_j\Gamma(a_j)}\cdot\frac{\prod_j\Gamma(a_j+n)}{\Gamma(n+1)\prod_i\Gamma(b_i+n)}$$

и для оценки второго сомножителя применим формулу Стирлинга

$$\log\Gamma(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\log x-x+\frac{1}{2}\log 2\pi+o(1).$$

Тогда при $p=q+1$ (постоянные $\frac{1}{2}\log 2\pi$ в этом случае сокращаются)

$$\log\left(\frac{\prod_j\Gamma(a_j+n)}{\Gamma(n+1)\prod_i\Gamma(b_i+n)}\right)+o(1)=\sum_j\left(\left(a_j+n+\frac{1}{2}\right)\log(a_j+n)-(a_j+n)\right)-$$
$$\sum_i\left(\left(b_i+n+\frac{1}{2}\right)\log(b_i+n)-(b_i+n)\right)-\left(\left(n+\frac{3}{2}\right)\log(1+n)-1-n\right)=$$
$$\sum_j\left(\left(a_j+n+\frac{1}{2}\right)\log(a_j+n)-a_j\right)-\sum_i\left(\left(b_i+n+\frac{1}{2}\right)\log(b_i+n)-b_i\right)-$$
$$\left(n+\frac{1}{3}\right)\log(1+n)-1=\left(\sum_j a_j-\sum_i b_i-1\right)\log n+o(1).$$

Последнюю малую величину составляют стремящиеся к нулю слагаемые
$(a_j+n+\frac{1}{2})\log(1+\frac{a_j}{n})-a_j,\;\;(b_i+n+\frac{1}{2})\log(1+\frac{b_i}{n})-b_i$ и $(n+\frac{3}{2})\log(1+\frac{1}{n})-1$.

Оценка (1) немедленно влечет за собой следующие утверждения (все при $p=q+1$):

а) при $\mathrm{Re}(\sum b_i-\sum a_i)>0$ гипергеометрический ряд абсолютно сходится при всех $z, |z|=1$ (т.е., на всем замыкании круга сходимости)

б) при $\mathrm{Re}(\sum b_i-\sum a_i)<-1$ гипергеометрический ряд расходится для любого $z, |z|=1$. Более того, можно показать, что

в) при $-1<\mathrm{Re}(\sum b_i-\sum a_i)<0$ гипергеометрический ряд сходится условно при всех $z, |z|=1, z\neq 1$.

2. Наиболее используема гипергеометрическая функция $F(a,b;c;z)\equiv F_{2,1}(a,b;c;z)$, определяемая как аналитическое продолжение соответствующего ряда. Для нее имеет место интегральное представление Гаусса

$$F(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt, \qquad \mathrm{Re}\,c>\mathrm{Re}\,b>0. \tag{2}$$

Переменная z считается отличной от положительного вещественного числа, большего 1 (либо принадлежащей комплексной плоскости с разрезом вдоль луча $(1,+\infty)$), а все степени понимаются в смысле своих основных значений, т.е., $t^{b-1}=e^{(b-1)\log t}$, $(1-t)^{c-b-1}=e^{(c-b-1)\log(1-t)}$, $(1-tz)^{-a}=e^{-a(\log|1-tz|+i\arg(1-tz))}$, $-\pi<\arg(1-tz)<\pi$. Условие $\mathrm{Re}\,c>\mathrm{Re}\,b>0$ гарантирует сходимость интеграла (вообще говоря, он несобственный).

Для доказательства предположим вначале, что $|z|<1$ и разложим подинтегральную функцию в ряд. Воспользовавшись вычислением эйлерова интеграла, получим требуемое соотношение:

$$\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt=\sum_{n\geq 0}\frac{(a)_n}{n!}z^n\int_0^1 t^{b+n-1}(1-t)^{c-b-1}dt=$$
$$\sum_{n\geq 0}\frac{(a)_n}{n!}z^n\frac{\Gamma(b+n)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c+n)}=\frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)}\sum_{n\geq 0}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}z^n$$

Далее заметим, что подинтегральное выражение и сам интеграл допускают аналитическое продолжение в разрезанную плоскость. Значит, и гипергеометрическая функция допускает такое же аналитическое продолжение.

Интегральное представление Гаусса позволяет вычислить значение гипергеометрической функции при $z=1$. А именно,

$$F(a,b;c;1)=\sum_{n\geq 0}\frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n}=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \qquad \mathrm{Re}(c-a-b)>0.$$

Действительно, подставляя в равенство (1) значение $z=1$, и вновь вычисляя эйлеров интеграл, получаем

$$F(a,b;c;1)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-a-1}dt=$$
$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b-a)}{\Gamma(c-a)}=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

Рассуждения заведомо верны при $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$, $\operatorname{Re}(c-a-b) > 0$, однако конечный результат справедлив в области параметров $\operatorname{Re}(c-a-b) > 0$ и поэтому верен во всей этой области в силу принципа аналитического продолжения.

3. Обозначим через δ дифференциальный оператор первого порядка $\delta = z\frac{d}{dz}$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}
\delta F_{p,q}(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;z) &= \sum_{n\geq 0} n\frac{(a_1)_n\cdots(a_p)_n}{(b_1)_n\cdots(b_q)_n}\frac{z^n}{n!},\\
(\delta+a_1)F_{p,q}(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;z) &= \sum_{n\geq 0} \frac{(a_1)_{n+1}(a_2)_n\cdots(a_p)_n}{(b_1)_n\cdots(b_q)_n}\frac{z^n}{n!},\\
(\delta+b_1-1)F_{p,q}(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;z) &= \sum_{n\geq 0} \frac{(a_1)_n\cdots(a_p)_n}{(b_1)_{n-1}(b_2)_n\cdots(b_q)_n}\frac{z^n}{n!},
\end{aligned}$$

так что имеет место тождество

$$\left\{z(\delta+a_1)\cdots(\delta+a_p) - \delta(\delta+c_1-1)\cdots(\delta+c_q-1)\right\}F_{p,q}(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;z) = 0$$

представляющее собой линейное дифференциальное уравнение порядка $\max(p,q+1)$. В частном случае классической гипергеометрической функции получаем гипергеометрическое уравнение Гаусса второго порядка

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + (c-(a+b+1)z)\frac{dy}{dz} - aby = 0 \tag{3}$$

на функцию $y = F(a,b;c;z)$.

4. Гипергеометрическое уравнение является линейным дифференциальным уравнением с тремя регулярными особыми точками.

Напомним определение. Пусть имеется линейное дифференциальное уравнение или система линейных дифференциальных уравнений $\bar{y}' = \bar{f}(z)\bar{y}$ на комплекснозначные функции $\bar{y} = \{y_i(z)\}$ комплексного переменного z с аналитическими коэффициентами, имеющими изолированные особые точки. Особая точка z_0 такой системы называется регулярной, если в окрестности этой точки всякое решение системы записывается в виде комбинаций $(z-z_0)^\lambda \log^k(z-z_0)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ $k \in \mathbb{N}$ произведений степенных и логарифмических функций (иными словами, допускается многозначность решения, но не допускается существенная особенность). Например, линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dz} = \lambda\frac{y}{z^k}$$

при $k = 1$ имеет в нуле регулярную особенность, в то время как при $k = 2, 3, ...$ эта особенность нерегулярна. В самом деле, в первом случае решения имеют допустимый вид $y = Cz^\lambda$, в то время как при $k > 1$ решения $y = Ce^{\frac{-\lambda}{(k-1)z^{k-1}}}$ имеют в нуле существенную особенность. Уравнение $y' = y$ имеет единственную нерегулярную особенность в бесконечности: после замены переменной $z = w^{-1}$, $\frac{d}{dz} = -w^2\frac{d}{dw}$, переводящей точку $z = \infty$ в точку $w = 0$ уравнение переписывается в виде $\frac{dy}{dw} = -\frac{y}{w^2}$, имеющее в нуле иррегулярную особенность. В свою очередь и решение $y = Ce^{\lambda z}$ имеет существенную особенность в бесконечности.

Линейное уравнение первого порядка обязано иметь особенности в расширенной комплексной плоскости; если эти особенности регулярные, то их как минимум две; всякое уравнение с двумя особыми точками в 0 и бесконечности имеет вид

$$y' = \lambda \frac{y}{z}.$$

Система линейных дифференциальных уравнений $y' = A(z)y$ имеет в точке z_0 регулярную особенность, если матричнозначная функция $A(z)$ имеет в этой точке полюс первого порядка, т.е., представима в виде $A(z) = \frac{B(z)}{z-z_0}$, где $B(z)$ регулярна в точке z_0.

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка $y'' + a(z)y' + b(z)y = 0$ имеет в точке $z = z_0$ регулярную особенность, если функция $a(z)$ имеет в точке $z = z_0$ полюс не выше первого порядка, а функция $b(z)$ - полюс порядка не выше второго. В самом деле дифференциальное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -a(z)y_2 - b(z)y_1 \end{cases}$$

Сделаем замену $\tilde{y}_2 = (z - z_0)y_2$. Уравнения примут вид

$$\begin{cases} y_1' = \dfrac{\tilde{y}_2}{z - z_0}, \\ \tilde{y}_2' = \left(\dfrac{1}{z - z_0} - a(z)\right)\tilde{y}_2 - (z - z_0)b(z)y_1 \end{cases}$$

Эта система имеет регулярную особенность, если $a(z)$ имеет полюс первого порядка, $b(z)$ - полюс второго порядка в точке $z = z_0$.

Рассмотрим уравнение $y'' + \dfrac{p(z)}{z - z_0}y' + \dfrac{q(z)}{(z - z_0)^2}y = 0$, где $p(z)$ и $q(z)$ - регулярны в точке $z = z_0$. Поскольку оно имеет регулярную особенность в этой точке, решения в окрестности точки $z = z_0$ могут иметь вид $y = (z - z_0)^\lambda \cdot u(z)$, где $u(z)$ - регулярная в точке $z = z_0$ функция. Будем поэтому искать решение в виде ряда с неопределенными коэффициентами

$$y = (z - z_0)^\lambda + a_1(z - z_0)^{\lambda+1} + a_2(z - z_0)^{\lambda+2} + \cdots .$$

Подставляя ряд в исходное дифференциальное уравнения и приравнивая нулю коэффициенты при наименьшей степени $(z - z_0)^{\lambda-2}$, получаем квадратичное соотношение

$$\lambda(\lambda - 1) + p_0\alpha + q_0 = 0, \qquad p_0 = p(z_0),\ q_0 = q(z_0), \tag{4}$$

необходимое для существования такого решения. Корни λ_1 и λ_2 этого уравнения называются экспонентами, или показателями особой точки. В стандартных учебниках (см. например, Уитеккер, Ватсон, т.1 гл.10), доказывается, что если λ_1 и λ_2 не различаются на целое число, то каждому из этих корней соответствует свое решение дифференциального уравнения, коэффициенты соответствующего ряда находятся реккурентно, получившийся ряд имеет непустую область сходимости. Если же разность $\lambda_1 - \lambda_2$ целочислена, то это утверждение верно для корня с наибольшей вещественной частью; для построения второго решения необходимо добавлять логарифмический член.

Применим эти рассуждения к гипергеометрическому уравнению (3). Его особые точки - $0, 1$ и ∞. В окрестности нуля уравнение имеет вид

$$y'' + \frac{c + ...}{z} y' + \frac{-ab + ...}{z} y = 0,$$

где многоточие означает слагаемые, обращающиеся в 0 при $z = 0$. Поэтому коэффициент $p_0 = c\ q_0 = 0$, уравнение (4) на показатели имеет вид

$$\lambda(\lambda - 1) + c\lambda = 0$$

с корнями $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 1 - c$. Решение, соответствующее первому корню - собственно гипергеометрический ряд; точный вид второго еще предстоит найти. В окрестности особой точки $z = 1$ уравнение принимает вид

$$y'' + \frac{a + b + 1 - c + ...}{z - 1} y' + \frac{ab + ...}{z - 1} y = 0,$$

где многоточие означает слагаемые, обращающиеся в 0 при $z = 1$. так что $p_0 = a+b+1-c$, $q_0 = 0$, а уравнение (4) на показатели имеет вид

$$\lambda(\lambda - 1) + (a + b + 1 - c)\lambda = 0$$

с корнями $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = c - a - b$, так что имеется одно решение гипергеометрического уравнения, регулярное в точке $z = 1$, и решение вида $y = (z - 1)^{c-a-b} \cdot u(z)$, где $u(z)$ аналитична в 1 (при условии, что $c - a - b$ -не целое число).

Для исследования в окрестности бесконечно удаленной точки сделаем замену переменной $z = w^{-1}$, $\frac{dy}{dz} = -w^2 \frac{dy}{dw}$, $\frac{d^2y}{dz^2} = w^4 \frac{d^2y}{dw^2} + 2w^3 \frac{dy}{dw}$, переведя бесконечность в 0, так что

$$w^2(w - 1)\frac{d^2y}{dw^2} + \left(w^2(2 - c) + (a + b - 1)w\right) \frac{dy}{dw} - aby = 0.$$

В этом уравнении рассматриваем регулярную особую точку 0, экспоненты в которой находятся из уравнения

$$\lambda(\lambda - 1) - (a + b - 1)\lambda + ab = 0,$$

корни которого $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = b$; соответствующие решения представимы в виде рядов

$$y_1(z) = z^{-a} + a_1 z^{-a-1} + \cdots , \qquad y_2(z) = z^{-b} + b_1 z^{-b-1} + \cdots ,$$

сходящихся в окрестности бесконечно удаленной точки.

5. Дробно-линейными преобразованиями переменной z можно получить из гипергеометрического уравнения линейное дифференциальное уравнение второго порядка с тремя заданными регулярными особыми точками α, β, γ на расширенной комплексной плоскости (уравнение Римана). Более того, имеет место следующая

Теорема Папперица. Существует единственное линейное дифференциальное уравнение 2 порядка с тремя заданными различными регулярными особыми точками α, β, γ на расширенной комплексной плоскости и показателями a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2.

Для доказательства предположим, что точки α, β, γ - конечные, а уравнение имеет вид

$$\frac{d^2y}{dz^2} + p(z)\frac{dy}{dz} + q(z)y = 0.$$

При замене $z = w^{-1}$ уравнение принимает вид

$$\frac{d^2y}{dw^2} + \left(\frac{2}{w} - \frac{1}{w^2}p\left(\frac{1}{w}\right)\right)\frac{dy}{dw} + \frac{1}{w^4}q\left(\frac{1}{w}\right)y = 0,$$

так что отсутствие у уравнения особенности в бесконечности означает аналитичность в бесконечности функций $z^2p(z) - 2z$ и $z^4q(z)$, в частности, существование у этих выражений конечных пределов при $z \to \infty$. Условия регулярности в точках α, β и γ говорят, в частности, что функция $p(z)$ имеет в этих точках полюсы первого порядка и, следовательно, представима в виде

$$p(z) = \frac{A}{z-\alpha} + \frac{B}{z-\beta} + \frac{C}{z-\gamma} + u(z),$$

где A, B, C - некоторые постоянные, а $u(z)$ - функция, аналитическая в конечной плоскости. При больших z

$$z^2p(z) - 2z = z^2\left(\frac{A}{z(1-\alpha/z)} + \frac{B}{z(1-\beta/z)} + \frac{B}{z(1-\gamma/z)} + u(z)\right) - 2z =$$

$$z^2\left(\frac{A}{z} + \frac{\alpha A}{z^2} + \cdots + \frac{B}{z} + \frac{\beta B}{z^2} + \cdots + \frac{C}{z} + \frac{\gamma C}{z^2} + \cdots + u(z)\right) - 2z =$$

$$z(A+B+C-2) + z^2u(z) + (\alpha A + \beta B + \gamma C) + o\left(z^{-1}\right),$$

так что существование конечного предела $z^2p(z) - 2z$ эквивалентно соотношениям $u(z) \equiv 0$ и $A + B + C = 2$. Аналогичными рассуждениями можно показать, что

$$q(z) = \frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)}\left(\frac{D}{z-\alpha} + \frac{E}{z-\beta} + \frac{F}{z-\gamma}\right)$$

для некоторых постоянных D, E, F. Характеристическое уравнение на показатели в точке $z = \alpha$ имеет вид

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda A + \frac{D}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} = 0$$

откуда по теореме Виета $a + 1 + a_2 = 1 - A$, $a_1a_2 = \frac{D}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$, так что $A = 1 - a_1 - a_2$, $D = (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)$. Аналогично находятся и остальные постоянные B, C, E, F, а искомое уравнение выглядит так:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left(\frac{1-a_1-a_2}{z-\alpha} + \frac{1-b_1-b_2}{z-\beta} + \frac{1-c_1-c_2}{z-\gamma}\right)\frac{dy}{dz} +$$

$$\left(\frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)a_1a_2}{z-\alpha} + \frac{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)b_1b_2}{z-\beta} + \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)c_1c_2}{z-\gamma}\right)\frac{y}{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)} = 0$$