Через $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ обозначается множество всех невырожденных $n \times n$-матриц.

14.1. Найдите дифференциал отображения $f\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $f(A) = A^{-1}$. Ответ должен быть записан в бескоординатной форме.

Обозначение. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество и $x \in U$. Для вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ и дифференцируемой в x функции $f\colon U \to \mathbb{R}$ будем писать $\xi(f)$ вместо $\partial_\xi f(x)$ (см. листок 12).

14.2 (*второе определение дифференциала*)**.** Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ и $V \subseteq \mathbb{R}^m$ — открытые множества, $\varphi\colon U \to V$ — дифференцируемое отображение. Докажите, что дифференциал φ в точке $x \in U$ — это единственный линейный оператор $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, удовлетворяющий условию $(L\xi)(f) = \xi(f \circ \varphi)$ для каждого $\xi \in \mathbb{R}^n$ и каждой дифференцируемой функции $f\colon V \to \mathbb{R}$.

14.3 (*третье определение дифференциала*)**.** Пусть U, V, φ, x — те же, что в предыдущей задаче, $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ — дифференцируемая кривая, $x = \gamma(0)$, $\xi = \gamma'(0)$ — ее вектор скорости. Вектором скорости какой кривой является $d\varphi(x)\xi$? Дайте еще одно определение дифференциала, основанное на этом свойстве.

Определение 14.1. Пусть $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытые множества. Отображение $\varphi\colon U \to V$ называется *C^p-диффеоморфизмом*, если оно биективно, $\varphi \in C^p(U)$ и $\varphi^{-1} \in C^p(V)$.

Определение 14.2. Пусть $M, U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытые множества, $\varphi\colon M \to U$ — диффеоморфизм, $(y^1, \ldots, y^n)$ — координатные функции в U. Функции $\tilde{y}^i = y^i \circ \varphi$ называются *криволинейными координатами* в M.

14.4$^{\mathrm{O}}$. Пусть $(\tilde{y}^1, \ldots, \tilde{y}^n)$ — криволинейные координаты в открытом множестве $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $f\colon M \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая в точке $x \in M$ функция. Докажите, что $d\tilde{y}^1(x), \ldots, d\tilde{y}^n(x)$ — базис в $(\mathbb{R}^n)^*$ и разложите $df(x)$ по этому базису; при этом постарайтесь не пользоваться декартовыми координатами в M.

14.5. Выразите в полярных координатах следующие операторы:
1)$^{\mathrm{O}}$ $x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$; **2)$^{\mathrm{O}}$** $y\dfrac{\partial}{\partial x} - x\dfrac{\partial}{\partial y}$; **3)$^{\mathrm{O}}$** $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ (оператор Лапласа).

14.6. 1)$^{\mathrm{O}}$ Как меняется гессиан $H_f(x)$ функции $f \in C^2(U)$ при замене декартовых координат на криволинейные?
2) Можно ли исследовать функцию на экстремум в криволинейных координатах по тому же рецепту, что и в декартовых?

14.7. Сформулируйте и докажите утверждение о том, что лапласиан в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ (см. листок 12) инвариантен относительно движений.

14.8. *Уравнением колебаний струны* называется следующее уравнение относительно неизвестной функции $u \in C^2(\mathbb{R})$:

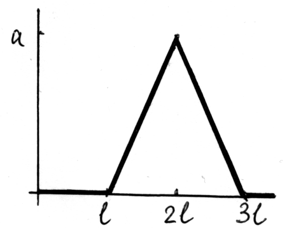
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

График функции $y(x) = u(x, t)$ при фиксированном t представляет собой профиль струны в момент времени t.
1) Найдите общее решение этого уравнения. (*Указание:* рассмотрите новые координаты $\xi = x - at$, $\eta = x + at$.)
2) Пусть заданы начальные условия

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x) \\ u'_t(x,0) = v_0(x) \end{cases}$$

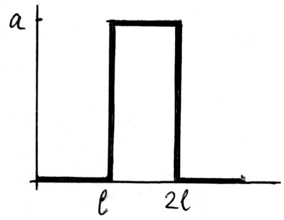
(профиль струны и скорости колебания ее точек в начальный момент времени). Напишите формулу для решения, удовлетворяющего этим условиям.

3) (*Струна гитары*). Пусть $v_0 = 0$, а u_0 — функция со следующим графиком:



Нарисуйте профиль струны в моменты времени $t_k = \dfrac{kl}{4a}$ $(k = 0, \ldots, 5)$.

4) (*Струна рояля*). Пусть $u_0 = 0$, а v_0 — функция со следующим графиком:



Нарисуйте профиль струны в моменты времени $t_k = \dfrac{kl}{4a}$ $(k = 0, \ldots, 5)$.