Глава 14

Подходы к построению пространств модулей

Мы уже обсуждали в п. 5.3, как выглядит пространство модулей эллиптических кривых, т.е. кривых рода 1. Это довольно типичный пример, на котором можно проследить многие черты общих пространств модулей. В этой главе мы более подробно его изучим, рассмотрим примеры других пространств модулей и дадим определение грубого пространства модулей кривых. С самого начала мы будем говорить о пространствах модулей кривых с отмеченными точками — свойства таких пространств можно изучать "на пальцах" уже для кривых малых родов, и эти свойства глубоко нетривиальны. С ростом рода кривых геометрия пространств их модулей усложняется и ее полное описание, как правило, недоступно. Несмотря на это, многие важные геометрические характеристики пространств модулей кривых высоких родов удается вычислить.

14.1 Первые примеры

Мы начинаем строить пространства $\mathcal{M}_{g;n}$ модулей кривых рода g с n отмеченными точками. Мы предполагаем, что $n \geq 3$ при $g = 0$ и $n \geq 1$ при $g = 1$. При таких ограничениях группа автоморфизмов кривой с отмеченными точками конечна. Причину их введения мы обсудим ниже. Точки считаются занумерованными, т.е. в качестве отношения эквивалентности берутся биголоморфизмы кривой, переводящие каждую из отмеченных точек в отмеченную точку с тем же номером. Как правило, мы будем обозначать отмеченные точки $x_1, \dots, x_n$.

Согласно вычислению Римана (см. п. 9.5), при $g \geq 2$ размерность пространства $\mathcal{M}_g = \mathcal{M}_{g;0}$ равна $3g - 3$. Добавление каждой отмеченной точки увеличивает размерность пространства модулей на 1, поэтому $\dim\,\mathcal{M}_{g;n} = 3g - 3 + n$. Последняя формула справедлива для произвольных значений g и n, удовлетворяющих сформулированным выше ограничениям.

Пространство модулей $\mathcal{M}_{0;3}$ устроено совсем просто: как мы знаем из п. 5.1, любые две тройки точек на проективной прямой переводятся друг в друга автоморфизмом проективной прямой, т.е. дробно-линейным преобразованием. Поэтому $\mathcal{M}_{0;3}$ состоит из одной точки. Эту точку можно представлять себе проективной прямой с фиксированной координатой z, причем отмеченные точки имеют координаты $0, 1$ и ∞.

Пространство модулей $\mathcal{M}_{0;4}$ естественным образом отождествляется с проективной прямой с тремя проколотыми точками (выбор проколов, согласно приведенному выше рассуждению, не важен). При фиксированных точках x_1, x_2, x_3 на проективной прямой четвертая точка x_4 может занимать любое положение, не совпадающее с положением ни одной из первых трех точек. Положение этой четвертой точки и является параметром на пространстве модулей. Если точки x_1, x_2, x_3, x_4 в произвольной координате на проективной прямой имеют координаты соответственно z_1, z_2, z_3, z_4, то значение этого параметра выражается двойным отношением (см. п. 2.2)

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}.$$

Координата z_4 четвертой отмеченной точки не может принимать значений $0, 1$ и ∞, а все остальные значения принимает.

Случай эллиптических (т.е. рода $g = 1$) кривых с $n = 1$ более сложен. Мы рассмотрели его в п. 5.3. Такая кривая является фактором комплексной прямой по некоторой двумерной решетке. Отмеченная точка совпадает с образами точек решетки при факторизации. Решетка задается парой своих образующих — комплексных векторов τ_1, τ_2, таких, что отношение τ_1/τ_2 невещественно. Мы будем предполагать, что порядок этих векторов задает на комплексной прямой ориентацию, совпадающую с обычной комплексной ориентацией.

Различные решетки могут задавать одну и ту же кривую. Так, группа $\mathbb{C}^*$ ненулевых комплексных чисел по умножению действует на множестве образующих решеток по правилу

$$\lambda : (\tau_1, \tau_2) \mapsto (\lambda\tau_1, \lambda\tau_2), \qquad \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Такое действие устанавливает биголоморфизм кривых, отвечающих этим двум решеткам. Кроме того, на множестве образующих решеток действует группа $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ (модулярная группа Клейна), состоящая из дробно-линейных преобразований с целыми коэффициентами:

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1.$$

Такое действие меняет базис решетки, сохраняя саму решетку. Поэтому оно сохраняет и соответствующую кривую.

Умножив базис (τ_1, τ_2) на $c = 1/\tau_1$, мы получим базис $(1, \tau)$, где $\tau = \tau_2/\tau_1$ — комплексный вектор, лежащий в верхней полуплоскости. Дальнейшая факторизация по действию модулярной группы Клейна позволяет отождествить пространство векторов τ с *модулярной кривой.* Это фундаментальная область действия группы $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ на верхней полуплоскости. В качестве фундаментальной области можно выбрать полосу, ограниченную единичной окружностью и двумя прямыми:

$$\left\{ z \in \mathbb{C} | -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2}, \quad |z| \geq 1, \operatorname{Im} z > 0 \right\}.$$

При этом на границах фундаментальной области необходимо провести отождествление. Точки склеиваются попарно в соответствии с правилом: $x+iy \equiv -x+iy$. Результат этого отождествления граничных точек полосы и есть пространство модулей эллиптических кривых с одной отмеченной точкой. Полученное пространство некомпактно и имеет две особенности — точки, отвечающие эллиптическим кривым с дополнительными симметриями. Это точка $\tau = e^{\pi i/2}$ и склеенная вместе пара точек $\tau = e^{\pi i/3}$ и $\tau = e^{2\pi i/3}$.

14.2 Требования к пространству модулей

В предыдущем разделе мы привели примеры пространств модулей кривых. Однако у нас до сих пор нет строгого определения того, что это такое. В то же время ясно, что это определение должно быть устроено так, чтобы включать в себя приведенные выше примеры. Итак, обсудим, какие требования представляются естественными.

1. Точки пространства модулей должны взаимно-однозначно соответствовать классам биголоморфной эквивалентности комплексных кривых. Несмотря на естественность, это требование представляется не очень сильным, поскольку мы пока не наложили никаких специальных требований на взаимнооднозначное соответствие, о котором идет речь.

2. На пространстве модулей должны иметься топология и комплексная структура. Это тоже не слишком сильное требование, поскольку упомянутые структуры пока никак не связаны с самими точками — модулями кривых. В то же время мы вправе ожидать, что *комплексные кривые, задающиеся близкими уравнениями в проективном пространстве, определяют близкие точки пространства модулей.* Формализация этого требования содержится в следующем пункте.

3. Предположим пока, что $g \geq 3$, $n = 0$. Мы вправе ожидать, что пространство модулей кривых существует не само по себе, а в сочетании с *универсальной кривой*, т.е. с таким комплексным многообразием $\mathcal{C}_{g;0}$ размерности $\dim \mathcal{M}_{g;0}+1$ и таким отображением $\pi : \mathcal{C}_{g;0} \to \mathcal{M}_{g;0}$, что прообраз $\pi^{-1}(c)$ общей точки является комплексной кривой C, класс эквивалентности которой совпадает с $c \in \mathcal{M}_{g;0}$. Необщие точки пространства модулей это кривые, имеющие автоморфизмы. Отметим, что отсутствие автоморфизмов у общей кривой гарантируется условием на род $g \geq 3$. Слоем универсальной кривой над такой необщей точкой является факторкривая самой кривой по

действию ее группы автоморфизмов. Кстати, именно существование кривых с нетривиальными автоморфизмами является препятствием к существованию *тонкого* пространства модулей кривых, т.е. такого пространства модулей, слои универсальной кривой над которым это всегда сами кривые, а не результаты их факторизации по группе автоморфизмов.

4. Пространство модулей должно быть *универсальным*, т.е. в нем должны содержаться все возможные семейства кривых. Пусть E, B — два комплексных многообразия, $p : E \to B$ — голоморфное отображение, такое, что прообраз $p^{-1}(b)$ любой точки $b \in B$ является результатом факторизации комплексной кривой рода g по ее группе автоморфизмов. Тогда мы требуем, чтобы существовали голоморфные отображения $E \to \mathcal{C}_{g;0}$ и $B \to \mathcal{M}_{g;0}$, составляющие вместе с p и π коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[d, "p"] & \mathcal{C}_{g;0} \arrow[d, "\pi"] \\ B \arrow[r] & \mathcal{M}_{g;0} \end{tikzcd}$$

5. Как показывает пример пространства модулей эллиптических кривых с одной отмеченной точкой, мы не вправе ожидать, что пространство модулей будет *многообразием*. Действительно, на модулярной кривой имеется две специальные точки, не имеющих окрестности, изоморфной диску. Однако эта кривая является *орбиобразием*: у каждой ее точки есть окрестность, изоморфная фактору диска по действию конечной группы. Мы отложим обсуждение орбиобразий, отметив сейчас лишь, что их введение является необходимым элементом построения пространств модулей.

Теперь можно дать определение.

Определение 14.2.1. *Грубым пространством модулей кривых* рода g называется тройка $(\mathcal{C}_{g;0}, \mathcal{M}_{g;0}, \pi : \mathcal{C}_{g;0} \to \mathcal{M}_{g;0})$, состоящая из двух комплексных орбиобразий и отображения из первого орбиобразия на второе, такая, что

1. всякий слой $\pi^{-1}(b)$, $b \in \mathcal{M}_{g;0}$ является результатом факторизации гладкой комплексной кривой рода g по группе ее автоморфизмов;

2. всякая кривая рода g встречается в качестве слоя этого отображения в точности один раз;

3. для всякого голоморфного семейства $p : E \to B$, слои которого — результаты факторизации гладких комплексных кривых рода g по группам их автоморфизмов, существуют голоморфные отображения $E \to \mathcal{C}_{g;0}$ и $B \to \mathcal{M}_{g;0}$, первое из которых — послойный изоморфизм, образующие вместе с проекциями π и p коммутативный квадрат.

Для случая кривых с отмеченными точками данное выше определение следует незначительно модифицировать. А именно, в тройку следует добавить четвертый элемент — набор из n сечений $\sigma_i : \mathcal{M}_{g;n} \to \mathcal{C}_{g;n}$, отвечающих отмеченным точкам: отмеченная точка x_i в слое $\pi^{-1}(b)$ это значение $\sigma_i(b)$ сечения σ_i в точке b. Разумеется, различные сечения не должны пересекаться.

Упражнение 14.2.2. Сформулируйте определение грубого пространства модулей кривых с отмеченными точками.

Упражнение 14.2.3. Как выглядит универсальная рациональная кривая а) с тремя; б) с четырьмя отмеченными точками? в) Как выглядит универсальная эллиптическая кривая с одной отмеченной точкой?

14.3 Наивная попытка построения пространства модулей

Пространство модулей кривых рода 3 можно пробовать строить следующим образом. Как мы знаем, всякая такая кривая C, не являющаяся гиперэллиптической, представима плоской кривой степени 4 (ее образом при каноническом отображении $\varphi : C \to \mathbb{CP}^2$). Наоборот, всякая гладкая плоская кривая степени 4 является кривой рода 3. Поэтому мы можем взять пространство всех однородных кубических многочленов от трех переменных, проективизировать его и выделить в проективизированном пространстве (открытое) подмножество, многочленов, отвечающих неособым кривым.

На проективизированном пространстве многочленов действует группа $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ проективных преобразований проективной плоскости. Фактор по этому действию и является искомым пространством модулей.

Так построенное пространство модулей несложно оснастить и универсальной кривой. Для этого следует рассмотреть прямое произведение пространства кубических многочленов на проективную плоскость и выделить в слое над каждым многочленом задаваемую им кривую. В результате мы получим гиперповерхность в прямом произведении. Действие группы проективных преобразований на базе продолжается до ее действия на всем прямом произведении. Ограничив это действие на выделенную гиперповерхность и профакторизовав эту гиперповерхность по указанному действию, мы получим универсальную кривую.

С кривыми рода 2 можно было бы пытаться поступить аналогичным образом только на этот раз в пространстве однородных многочленов третьей степени нужно выбрать подмножество, состоящее из всех многочленов, задающих кривые с одной двойной точкой. Построение универсальной кривой в этом случае затруднено необходимостью разрешить особенности слоя.

Какие трудности встречаются на описанном пути? Если мы хотим включить в рассмотрение гиперэллиптические кривые рода 3 (размерность пространства которых, как мы знаем, на единицу меньше размерности пространства всех кривых и равна 5), то предложенная схема уже не работает. Причина этого в том, что образ гиперэллиптической кривой при каноническом отображении — проективная прямая, а значит, неизоморфен самой кривой. Другой универсальной трудностью является необходимость факторизовать по действию большой непрерывной группы — группы проективных преобразований проективной плоскости. Проблема в том, что даже если такая группа действует на хорошем пространстве, фактор по этому действию может иметь очень плохие особенности — гораздо хуже тех, что мы ожидаем от орбиобразия (последнее локально является фактором по дискретному действию группы). Доказательство невозможности появления особенностей неалгебраического типа — трудная и принципиально важная задача. Кроме того, при $g > 3$ далеко не всякая кривая рода g реализуется гладкой плоской кривой.

Еще одна трудность касается проблемы компактификации пространства модулей. Строя пространство модулей, мы рассчитываем в дальнейшем построить его компактификацию — компактное пространство, содержащее пространство модулей в качестве открытого плотного подмножества. У каждого некомпактного пространства есть много различных компактификаций. При этом нам естественно искать *модулярную* компактификацию, т.е. такую, точки которой взаимнооднозначно соответствуют модулям некоторых кривых. Поскольку все гладкие кривые уже исчерпаны, эти точки должны соответствовать *особым* кривым.

Если мы компактифицируем пространство плоских кривых, то естественной компактификацией будет пространство плоских же кривых заданной степени. Однако, как показывают простейшие примеры, такая компактификация невозможна.

Пример 14.3.1. Рассмотрим следующее семейство плоских эллиптических кривых:

$$y^2 - x^3 - t = 0,$$

зависящее от параметра t. При всех ненулевых значениях параметра t соответствующие кривые попарно биголоморфны (докажите!). Поэтому предельная кривая при $t \to 0$ должна быть точно такой же. Однако при $t = 0$ соответствующая кривая семейства, $y^2 = x^3$, рациональна и имеет особенность типа точки возврата (каспа), что указывает на невозможность построить компактификацию таким образом.

В дальнейшем мы будем компактифицировать пространство модулей модулями таких кривых, которые имеют лишь простейшие особенности — двойные самопересечения. Для этого приходится использовать вложения гладких кривых не в плоскость и даже не в проективное пространство размерности $g-1$, как при каноническом отображении, а в пространство большой размерности, где бо́льшая свобода позволяет кривым вырождаться, не приобретая сложных особенностей. Интересующие нас пространства кривых в этом случае уже не описываются пространствами однородных многочленов, поскольку множество нулей однородного многочлена в многомерном случае — гиперповерхность, а не кривая. Такие пространства кривых описываются новым для нас объектом — *схемой Гильберта*. Для определения схемы Гильберта нам потребуется сначала ввести понятие многочлена Гильберта.

14.4 Многочлен Гильберта

Рассмотрим на проективной прямой $\mathbb{CP}^1$ конечный набор точек $X \subset \mathbb{CP}^1$, состоящий из $|X| = d$ различных точек. Пусть $(x_0 : x_1)$ — проективные координаты в $\mathbb{CP}^1$, такие, что X не содержит точки $(0 : 1)$. Обозначим через I_X идеал в кольце $\mathbb{C}[x_0, x_1]$ многочленов от двух переменных, состоящий из многочленов, обращающихся в нуль на множестве X. Этот идеал раскладывается в прямую сумму конечномерных подпространств, состоящих из однородных многочленов:

$$I_X = I_X^{(1)} \oplus I_X^{(2)} \oplus I_X^{(3)} \oplus \ldots,$$

где через $I_X^{(n)}$ обозначено подпространство однородных многочленов степени n в I_X, $n = 1, 2, \ldots$.

Размерности пространств $I_X^{(n)}$ равны

$$\dim I_X^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{при } n < d \\ n - d + 1 & \text{при } n \geq d. \end{cases}$$

Действительно, однородный многочлен принадлежит $I_X^{(n)}$ в том и только в том случае, если все точки множества X являются его корнями. Поэтому степень такого многочлена не может быть меньше d.

Зафиксируем какой-нибудь однородный многочлен $p_X(x_0, x_1)$ степени d, корнями которого являются точки множества X (любые два таких многочлена отличаются друг от друга ненулевым постоянным множителем). Всякий многочлен из I_X степени $n \geq d$ является результатом умножения выбранного однородного многочлена $p_X(x_0, x_1)$ на произвольный однородный многочлен степени $n - d$. Пространство однородных многочленов от двух переменных степени $n - d$ имеет размерность $n - d + 1$, что и дает приведенную формулу.

Рассмотрим теперь последовательность $\dim\ \mathbb{C}^{(n)}[x_0, x_1]/I_X^{(n)}$ размерностей факторпространств пространств однородных многочленов степени n от переменных x_0, x_1 по подпространствам многочленов той же степени, входящим в идеал I_X. При $n = 1, 2, \ldots, d-1$ элементы этой последовательности равны $n+1$; начиная с $n = d$ они принимают значения $(n+1)-(n-d+1) = d$. Тем самым, справедливо равенство

$$\dim\ \mathbb{C}^{(n)}[x_0, x_1]/I_X^{(n)} = d \text{ при } n \geq d.$$

Аналогичное утверждение имеет место и для конечного набора точек на плоскости. Пусть $X \subset \mathbb{CP}^2$ — набор из d попарно различных точек, $(x_0 : x_1 : x_2)$ — проективные координаты в $\mathbb{CP}^2$, и пусть I_X — идеал в кольце многочленов $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$, обращающихся в нуль на множестве X. Размерности подпространств однородных многочленов степени n $I_X^{(n)} \subset \mathbb{C}^{(n)}[x_0, x_1, x_2]$ в этом случае уже зависят от взаимного расположения точек. Так, если все d точек множества X лежат на одной прямой, то $\dim\ I_X^{(1)} = 1$, в противном случае эта размерность равна 0. Несмотря на это, если n достаточно велико, то

$$\dim\ \mathbb{C}^{(n)}[x_0, x_1, x_2]/I_X^{(n)} = d. \tag{14.1}$$

Действительно, при больших значениях n класс смежности многочлена в $\mathbb{C}^{(n)}[x_0, x_1, x_2]$ по подпространству $I_X^{(n)}$ однозначно определяется значениями этого многочлена в точках множества X, а набор этих значений может быть любым. При этом значение n, при котором равенство (14.1) начинает выполняться, зависит от конкретного расположения точек.

Упражнение 14.4.1. Докажите, что при $n \geq d$ равенство (14.1) выполняется как бы ни были расположены на плоскости точки множества X.

Упражнение 14.4.2. Пусть X — множество из d попарно различных точек в проективном пространстве размерности N. Докажите, что при $n \geq d$ равенство

$$\dim\ \mathbb{C}^{(n)}[x_0, x_1, \ldots, x_N]/I_X^{(n)} = d.$$

выполняется как бы ни были расположены точки множества X.

Пусть теперь X — прямая на проективной плоскости. Идеал $I_X \subset \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ состоит из многочленов от трех переменных, обращающихся в нуль на прямой X. Размерности однородных компонент этого идеала равны

$$\dim\ I_X^{(n)} = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Действительно, выбрав проективные координаты так, чтобы прямая X задавалась уравнением $x_0 = 0$, мы получаем, что I_X состоит из многочленов, делящихся на x_0. Размерность пространства таких однородных многочленов степени n равна размерности пространства однородных многочленов степени $n-1$ от трех переменных, что и утверждается приведенным выше равенством. Тем самым, справедливо равенство

$$\dim\ \mathbb{C}^{(n)}[x_0, x_1, x_2]/I_X^{(n)} = \binom{n+2}{2} - \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = n+1.$$

Если же мы возьмем в качестве X гладкую квадрику на плоскости, то

$$\dim\ I_X^{(n)} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \text{ при } n \geq 2$$

(поскольку $I_X^{(n)}$ состоит из однородных многочленов степени n, делящихся на определяющий квадратичный многочлен квадрики), и при тех же значениях n

$$\dim\ \mathbb{C}^{(n)}[x_0, x_1, x_2]/I_X^{(n)} = \binom{n+2}{2} - \binom{n}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = 2n+1.$$

Мы рассмотрели несколько простых примеров алгебраических подмногообразий в проективных пространствах. Во всех рассмотренных примерах величина $\dim\ \mathbb{C}^{(n)}[x_0, x_1, \dots, x_N]/I_X^{(n)}$ при больших значениях n оказывается многочленом от n степени, равной размерности подмногообразия: для подмногообразия нулевой размерности многочлен представляет собой константу, для подмногообразий размерности 1 многочлен линеен. При этом полученный многочлен зависит не только от самого многообразия X, но и от способа его вложения в проективное пространство: и прямая, и гладкая квадрика на плоскости представляют собой рациональную кривую, однако сопоставляемые им многочлены различны.

Оказывается, перечисленные выше свойства наблюдаются у любого алгебраического подмногообразия в проективном пространстве.

Теорема 14.4.3 (Гильберт)**.** *Пусть X — алгебраическое подмногообразие в $\mathbb{CP}^N$, $(x_0 : \dots : x_N)$ — проективные координаты и $I_X^{(n)} \subset \mathbb{C}^{(n)}[x_0, x_1, \dots, x_N]$ — подпространство в пространстве однородных многочленов, состоящее из многочленов, обращающихся в 0 на X. Тогда для достаточно больших значений n величина*

$$\dim\ \mathbb{C}^{(n)}[x_0, x_1, \dots, x_N]/I_X^{(n)}$$

является многочленом от n. Степень $m = m_X$ этого многочлена равна размерности подмногообразия X, а коэффициент при n^m в нем равен $\frac{d}{m!}$, где $d = d_X$ — степень подмногообразия X.

Многочлен $h_X(n)$, существование которого утверждается в теореме, называется *многочленом Гильберта* подмногообразия X. Мы не приводим доказательства теоремы, отсылая читателя, например, к [].

Упражнение 14.4.4. Найдите многочлены Гильберта следующих подмногообразий:

- прямой в проективном пространстве;
- кубики на плоскости;
- плоскости в проективном пространстве;
- объединения прямой и точки на плоскости;
- объединения прямой и трансверсально пересекающей ее гладкой квадрики на плоскости;
- объединения прямой и касающейся ее гладкой квадрики на плоскости;
- гладкой гиперповерхности степени d в проективном пространстве размерности N (такая гиперповерхность задается одним неприводимым однородным уравнением степени d от $N+1$ переменных);
- скрученной кубики в проективном пространстве;
- пары пересекающихся прямых в проективном пространстве;

- пары скрещивающихся прямых в проективном пространстве.

Упражнение 14.4.5. Пусть $X \subset \mathbb{CP}^2$ — “двойная точка” на плоскости. Ее идеал $I_X \subset \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ состоит из многочленов, имеющих в данной точке нуль порядка не меньше 2. Вычислите многочлен Гильберта $h_X(n)$. Совпадает ли он с многочленом Гильберта пары различных точек на плоскости?

14.5 Схемы Гильберта

Схема Гильберта это пространство модулей подмногообразий в данном проективном пространстве, имеющих данный многочлен Гильберта. Используемое в этом параграфе слово “схема” следует воспринимать как “алгебраическое многообразие”. Причина использования именно слова “схема” состоит в том, что пространство модулей проективных многообразий с данным многочленом Гильберта может существовать, но не быть при этом алгебраическим многообразием. Более общее понятие *схемы* покрывает уже все возможные ситуации. Для построения пространств модулей кривых, однако, эта более общая конструкция не понадобится.

По данному многочлену $p(n)$ схема Гильберта подмногообразий в $\mathbb{CP}^N$ с многочленом Гильберта $p(n)$ строится следующим образом. Обозначим через $Q_N(n)$ размерность пространства однородных многочленов степени n от $N+1$ переменных. Это многочлен степени N от n:

$$Q_N(n) = \binom{N+n}{N},$$

многочлен Гильберта всего проективного пространства. Для данного многочлена $p = p(n)$ существует значение n_0, такое, что размерность однородной составляющей $I_X^{(n)}$ идеала I_X задается значением $p(n)$ этого многочлена для любого подмногообразия $X \subset \mathbb{CP}^N$ с многочленом Гильберта $h_X(n) = p(n)$.

Для произвольного $n > n_0$ однородная составляющая $I_X^{(n)}$ определяет плоскость размерности $Q_N(n) - p(n)$ в пространстве $\mathbb{C}^{(n)}[x_0, \dots, x_N]$ размерности $Q_N(n)$. Можно показать, что для любых двух различных подмногообразий в $\mathbb{CP}^N$ с данным многочленом Гильберта $p(n)$ соответствующие им плоскости различны. Тем самым, мы сопоставили многочлену $p(n)$ некоторое подмножество в грассманиане $\mathrm{Gr}(Q_N(n), Q_N(n) - p(n))$ плоскостей размерности $Q_N(n) - p(n)$ в пространстве размерности $Q_N(n)$. Это подмножество и является *схемой Гильберта* $\mathrm{Hilb}_N^{p(n)}$ подмногообразий в $\mathbb{CP}^N$ с многочленом Гильберта $p(n)$.

Как и в случае других пространств модулей, схема Гильберта наделена универсальным расслоением: в прямом произведении $\mathbb{CP}^N \times \mathrm{Hilb}_N^{p(n)}$ выделим над каждой точкой схемы Гильберта отвечающее ей подмногообразие X в $\mathbb{CP}^N$. Объединение всех этих подмногообразий и будет требуемым универсальным расслоением.

14.6 Плюриканонические вложения

Для помещения кривой в пространства большой размерности будем пользоваться плюриканоническими вложениями. Как мы видели (см. п. 9.4), каноническое отображение кривой рода $g \geq 2$ является вложением в том и только в том случае, если кривая негиперэллиптическая.

Теорема 14.6.1. *Рассмотрим на кривой C рода $g \geq 2$ третью тензорную степень $(T^\vee)^{\otimes 3}(C)$ канонического линейного расслоения. Тогда соответствующее этому линейному расслоению отображение φ_{3K} кривой C в проективизацию пространства, двойственного пространству его голоморфных сечений, является вложением.*

Напомним, что отображение φ_L строится по линейному расслоению L следующим образом (см. п. 7.5). Каждая точка x кривой C корректно определяет линейный функционал на пространстве сечений расслоения L с точностью до множителя: отношение значений этого функционала на двух сечениях $\sigma_1, \sigma_2 : C \to L$ равно $\sigma_1(x) : \sigma_2(x)$. Поэтому каждая точка x кривой C корректно определяет точку проективизации пространства, двойственного к пространству голоморфных сечений расслоения L.

Замечание 14.6.2. Третью степень в утверждении теоремы можно заменить на любую бóльшую степень.

Упражнение 14.6.3. Найдите размерность N проективного пространства голоморфных сечений третьей степени канонического расслоения на кривой рода g.

Упражнение 14.6.4. Приведите пример кривой рода $g = 2$, на которой отображение φ_{2K}, отвечающее тензорному квадрату кокасательного расслоения, не задает вложения.

Доказательство теоремы. Для доказательства теоремы можно воспользоваться следующим утверждением.

Лемма 14.6.5. *Пусть D — дивизор на данной кривой C. Отображение $\varphi_D : C \to P(H^0(L(D))^\vee$ этой кривой в проективизацию пространства, двойственного пространству голоморфных сечений расслоения $L(D)$, является вложением в том и только в том случае, если для любой пары различных точек x, y кривой C выполняются соотношения для размерностей*

$$l(D - x) = l(D) + 1, \qquad l(D - x - y) = l(D) + 2.$$

Доказательство этого утверждения и доказательство теоремы на его основе мы оставляем читателю.

Упражнение 14.6.6. Пусть на кривой C рода g отмечены попарно различные точки $x_1, \ldots, x_n$ ($n \geq 3$, если $g = 0$ и $n \geq 1$, если $g = 1$). Обозначим через X дивизор на C, состоящий из этих точек, взятых с кратностью 1, $X = x_1 + \cdots + x_n$. Какую тензорную степень k линейного расслоения $L(K+X)$ достаточно взять, чтобы отображение $\varphi_{k(K+X)}$, строящееся по этой степени, было вложением для любой кривой рода g с n отмеченными точками?

14.7 Факторизация по действию группы проективных преобразований и стабильность

Мы подготовили почву для построения пространств модулей $\mathcal{M}_{g;0}$ при $g \geq 2$. Основой для построения такого пространства является схема Гильберта $\mathrm{Hilb}^{p_g(n)}_{5g-6}$. Здесь $p_g(n) = 3(2g-2)n - g + 1$ — многочлен Гильберта 3-канонической кривой рода g. На данном этапе нас будет интересовать, впрочем, не все пространство $\mathrm{Hilb}^{p_g(n)}_{5g-6}$, а открытое подпространство в нем, состоящее из точек Гильберта гладких кривых. Отметим, что всякая гладкая кривая в $\mathbb{CP}^{5g-6}$ с таким многочленом Гильберта является 3-канонической кривой.

Упражнение 14.7.1. Проверьте, что многочлен Гильберта 3-канонической кривой равен
$$p_g(n) = 3(2g-2)n - g + 1$$
и докажите, что любая гладкая кривая с таким многочленом Гильберта в $\mathbb{CP}^{5g-6}$ является 3-канонической кривой рода g.

Пространство $\mathcal{M}_{g;0}$ является результатом факторизации подпространства в схеме Гильберта по действию группы проективных преобразований $\mathrm{PGL}(5g-6)$. Факторпространство по действию большой непрерывной группы, как правило, имеет плохие особенности неалгебраической природы. В случае интересующего нас действия группы $\mathrm{PGL}(5g-6)$ на открытом подмножестве в $\mathrm{Hilb}^{p_g(n)}_{5g-6}$ такого, однако, не происходит. Попробуем разобраться, откуда возникают особенности, и почему их нет в интересующем нас случае.

Пусть группа Ли G действует линейными преобразованиями на векторном пространстве V, и пусть $M \subset V$ — G-инвариантное подмножество в V. Факторпространство M/G имеет неалгебраические особенности в случае, когда две различные орбиты Gx и Gy точек $x, y \in M$ имеют пересекающиеся замыкания (в этом случае соответствующие точки факторпространства неотделимы). Замыкания двух различных орбит пересекаются в том и только в том случае, если оба эти замыкания содержат начало координат. Точка $x \in M \subset V$ называется *стабильной по Гильберту*, если замыкание $\overline{Gx}$ ее орбиты Gx не содержит начала координат.

Пример 14.7.2. Пусть $V = \mathbb{C}^2$ — комплексная плоскость, и пусть группа $\mathbb{C}^*$ ненулевых комплексных чисел по умножению действует на V линейными преобразованиями. Всякое такое действие раскладывается в прямую сумму одномерных, а всякое одномерное действие группы $\mathbb{C}^*$ имеет вид $\lambda : t \mapsto \lambda^w t$ для некоторого целого числа w. Поэтому действию группы $\mathbb{C}^*$ на V сопоставляется пара целых чисел (w_1, w_2) (которые могут и совпадать): в подходящих координатах действие группы имеет вид $\lambda : (t_1, t_2) \mapsto (\lambda^{w_1} t_1, \lambda^{w_2} t_2)$.

Рис. 14.1: Орбиты действия группы $\mathbb{C}^*$ на плоскости при а) $w_1, w_2 > 0$; б) $w_1, w_2 < 0$; в) $w_1 > 0$, $w_2 < 0$.

Стабильность по Гильберту точек плоскости V зависит от знаков чисел w_1 и w_2. Если оба числа w_1 и w_2 положительны, то при $\lambda \to 0$ *любая* точка плоскости стремится к началу координат и, следовательно, замыкания орбит любых двух точек пересекаются (см. рис. 14.1 а)). Если они оба отрицательны, к началу координат стремится любая точка плоскости при $\lambda \to \infty$. Напротив, если одно из чисел w_1, w_2 положительно, а другое отрицательно, то на плоскости имеется открытая плотная *область стабильности*, состоящая из точек, не лежащих ни на одной из осей координат. Замыкания орбит точек из этой области не содержат начала координат, см. рис. 14.1 в), и факторпространство этой области по действию группы $\mathbb{C}^*$ не имеет особенностей. Замыкания орбит точек осей (на которых одна из координат обращается в 0) содержат начало координат.

Приведенный выше пример носит общий характер и позволяет сформулировать критерий стабильности по Гильберту для действия произвольной группы на векторном пространстве линейными преобразованиями.

Теорема 14.7.3 (численный критерий Гильберта–Мамфорда)**.** *Точка $x \in V$ стабильна относительно действия группы G на V линейными преобразованиями, если среди координат разложения точки x по собственным направлениям любой однопараметрической подгруппы группы G есть ненулевые координаты как с положительными, так и с отрицательными характеристическими числами.*

Теперь построение пространства модулей $\mathcal{M}_g = \mathcal{M}_{g;0}$ при $g \geq 2$ выглядит следующим образом.

1. Строим схему Гильберта $\mathrm{Hilb}_{5g-6}^{p_g(n)}$ подмногообразий в $\mathbb{CP}^{5g-6}$ с многочленом Гильберта $p_g(n) = (6g-6)n - g + 1$. Эта схема Гильберта вложена в грассманиан $\mathrm{Gr}(Q_N(n), Q_N(n) - p_g(n))$.

2. Вкладываем грассманиан $\mathrm{Gr}(Q_N(n), Q_N(n){-}p_g(n))$ в проективное пространство $\wedge^{p_g(N)}(\mathbb{C}^{(N)}[x_0, \ldots, x_{5g-6}])$ с помощью вложения Плюккера[1]

[1] Вложение Плюккера переводит точку грассманиана во внешнее произведение элемен-

и рассматриваем конус над грассманианом в соответствующем векторном пространстве на единицу большей размерности. Действие группы проективных преобразований PSL_{5g-6} на $\mathbb{CP}^{5g-6}$ поднимается до действия группы линейных преобразований пространства, объемлющего конус над грассманианом.

3. С помощью численного критерия Гильберта–Мамфорда убеждаемся, что точки схемы Гильберта, отвечающие образам гладких кривых рода g при 3-каноническом вложении, стабильны относительно линейного действия указанной группы. В результате соответствующее фактормногообразие является гладким орбиобразием, которое и представляет собой пространство модулей $\mathcal{M}_{g;n}$.

4. Каждый из предыдущих шагов сопровождается построением соответствующей универсальной кривой.

14.8 Пространства модулей кривых с отмеченными точками

Построение пространств $\mathcal{M}_{g;n}$ модулей кривых с отмеченными точками происходит аналогично построению пространств модулей $\mathcal{M}_g = \mathcal{M}_{g;0}$, только вместо 3-канонических вложений мы рассматриваем вложения, определенные подходящей степенью линейного расслоения $L(K + X)$, где X — дивизор отмеченных точек.

Еще один способ построения пространств модулей кривых с отмеченными точками — индуктивный. Если мы уже построили пространство модулей $\mathcal{M}_{g;n}$, то мы можем попробовать построить пространство модулей $\mathcal{M}_{g;n+1}$ кривых того же рода, с увеличенным на единицу количеством отмеченных точек. На самом деле, в качестве такого пространства может выступать универсальная кривая $\mathcal{C}_{g;n}$ выкинутыми из нее структурными сечениями. Действительно, каждая точка этого пространства определяет кривую рода g с $n+1$ отмеченными точками — первые n точек задаются структурными сечениями, а $n+1$-ой точкой является она сама. Это пространство обладает всеми необходимыми свойствами, но над ним надо, в свою очередь, построить универсальную кривую. Отметим, что проекция π из определения универсальной кривой в такой интерпретации становится *отображением забывания* $\pi_{g;n} : \mathcal{M}_{g;n+1} \to \mathcal{M}_{g;n}$: она "забывает" $n+1$-ю отмеченную точку, превращая кривую с $n+1$ отмеченными точками в кривую с n отмеченными точками.

Для рациональных кривых эта конструкция выглядит особенно просто. Рассмотрим прямое произведение $\mathcal{M}_{0;n} \times \mathbb{CP}^1$, где второй сомножитель представляет собой проективную прямую с фиксированной координатой z.

тов произвольного базиса в плоскости, соответствующей этой точке, рассматриваемое с точностью до умножения на константу. Образ вложения Плюккера задается квадратичными уравнениями (соотношениями Плюккера).

Сопоставим каждой точке пространства модулей $\mathcal{M}_{0;n}$ рациональную кривую, в которой отмеченные точки x_1, x_2 и x_3 имеют координаты $0, 1$ и ∞ соответственно. Тогда координаты всех остальных отмеченных точек однозначно определены, и мы получаем n попарно непересекающихся сечений $\sigma_1, \dots, \sigma_n : \mathcal{M}_{0;n} \to \mathcal{M}_{0;n} \times \mathbb{CP}^1$. Дополнение к этим сечениям в прямом произведении и есть искомая универсальная кривая $\mathcal{C}_{0;n} \equiv \mathcal{M}_{0;n+1}$.

Замечание 14.8.1. Очередное пространство модулей рациональных кривых является подмножеством в прямом произведении предыдущего пространства на проективную прямую. Однако само оно не является прямым произведением нетривиальных сомножителей. Отображение забывания превращает его в расслоение над предыдущим пространством модулей, слои которого имеют одинаковую топологию (проколотой в нескольких точках сферы), но различные комплексные структуры.

Разумеется, полученная конструкция совпадает со следующей, которая выглядит на первый взгляд более простой. Возьмем пространство $\mathbb{C}^{n-3}$ с координатами $z_4, \dots, z_n$ — координатами, которые приобретают последние $n-3$ отмеченных точек после того, как в качестве координат первых точек выбраны $0, 1$ и ∞ — и выкинем из него гиперплоскости $z_i = 0, z_i = 1$, $i = 4, \dots, n$ и $z_i = z_j$ при $i \neq j$, отвечающие возможным совпадениям отмеченных точек. Однако она гораздо лучше приспособлена к построению в последующем интересующей нас компактификации.