"Спецфункции". Лекция 10

Гипергеометрическое уравнение

1. Риман обозначил символом ("схемой")

$$P\left\{\begin{array}{cccc}\alpha & \beta & \gamma & \\ a_1 & b_1 & c_1 & z\\ a_2 & b_2 & c_2 & \end{array}\right\}$$

множество решений уравнения Римана с регулярными точками α, β, γ и показателями a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2. Под этим можно понимать либо набор шести локальных решений соответствующего уравнения Римана с асимптотиками $(z-\alpha)^{a_1}$, $(z-\alpha)^{a_2}$, $(z-\beta)^{b_1}$, $(z-\beta)^{b_2}$, $(z-\gamma)^{c_1}$, $(z-\gamma)^{c_2}$ (строго говоря, лишь если a_1-a_2, b_1-b_2, c_1-c_2 не есть целые числа), либо, в силу теоремы Папперица, само дифференциальное уравнение Римана с соответствующими параметрами, либо, говоря более изысканным языком, двумерную локальную систему над $\mathbb{CP}^1$ с ветвлениями в точках α, β, γ и логарифмами монодромий a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2. По смыслу обозначений, в схеме Римана можно переставлять столбцы, а также второй и третий элемент в каждом столбце.

Замечательное следствие теоремы Папперица состоит в том, что она отождествляет уравнение Римана со свойствами его решений; преобразуя решения, мы знаем, как преобразуется и само уравнение и наоборот. Мы можем, например, применить дробно-линейное преобразование независимого аргумента z

$$t=\frac{\lambda z+\mu}{\delta z+\nu},\qquad\qquad \lambda\nu-\mu\delta=1$$

переводящее точки α, β, γ в точки α', β', γ'. Это преобразование переводит функции с асимптотиками $(z-\alpha)^{a_1}$, $(z-\alpha)^{a_2}$, $(z-\beta)^{b_1}$, $(z-\beta)^{b_2}$, $(z-\gamma)^{c_1}$, $(z-\gamma)^{c_2}$ в точках $z=\alpha$, $z=\beta$, $z=\gamma$, в функции с асимптотиками $(t-\alpha)^{a_1}$, $(z-\alpha')^{a_2}$, $(t-\beta')^{b_1}$, $(t-\beta')^{b_2}$, $(t-\gamma')^{c_1}$, $(t-\gamma')^{c_2}$ в точках $t=\alpha'$, $t=\beta'$, $t=\gamma'$, которые, следовательно, удовлетворяют уравнению Римана с параметрами α', β', γ', a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 и независимой переменной t. Запишем это в виде равенства

$$P\left\{\begin{array}{cccc}\alpha & \beta & \gamma & \\ a_1 & b_1 & c_1 & z\\ a_2 & b_2 & c_2 & \end{array}\right\}=P\left\{\begin{array}{cccc}\alpha' & \beta' & \gamma' & \\ a_1 & b_1 & c_1 & t\\ a_2 & b_2 & c_2 & \end{array}\right\}$$

С другой стороны, мы можем умножить все решения уравнения Римана, скажем, на функцию $(z-\alpha)^d$. Тогда новый набор функций будет имеет локальные асимптотики вида $(z-\alpha)^{a_1+d}$, $(z-\alpha)^{a_2+d}$, $(z-\beta)^{b_1}$, $(z-\beta)^{b_2}$, $(z-\gamma)^{c_1}$, $(z-\gamma)^{c_2}$, поскольку функция $(z-\alpha)^d$ регулярна в точках β и γ (в случае, когда β и γ отличны от бесконечности). Следовательно, эти функции снова будут решениями уравнения Римана с соответствующими параметрами, что записывается как равенство

$$(z-\alpha)^dP\left\{\begin{array}{cccc}\alpha & \beta & \gamma & \\ a_1 & b_1 & c_1 & z\\ a_2 & b_2 & c_2 & \end{array}\right\}=P\left\{\begin{array}{cccc}\alpha & \beta & \gamma & \\ a_1+d & b_1 & c_1 & z\\ a_2+d & b_2 & c_2 & \end{array}\right\}. \tag{1}$$

Гипергеометрическое уравнение

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2}+(c-(a+b+1)z)\,\frac{dy}{dz}-aby=0 \tag{2}$$

в этом формализме описывается схемой Римана

$$P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & a & z \\ 1-c & c-a-b & b & \end{array}\right\}.$$

Преобразование (1) в этом случае имеет вид:

$$z^d(z-1)^e P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & a & z \\ 1-c & c-a-b & b & \end{array}\right\} = P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ d & e & a-d-e & z \\ 1-c+d & c-a-b+e & b-d-e & \end{array}\right\}.$$

В частности,

$$P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & a & z \\ 1-c & c-a-b & b & \end{array}\right\} = z^{1-c}P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ c-1 & 0 & a+1-c & z \\ 0 & c-a-b & b+1-c & \end{array}\right\} =$$
$$= z^{1-c}P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & a+1-c & z \\ c-1 & c-a-b & b+1-c & \end{array}\right\}.$$

Из этого равенства мы заключаем, что при нецелом c решение гипергеометрического уравнения (2) с асимптотикой z^{1-c} имеет вид

$$y=z^{1-c}F(a+1-c,b+1-c;2-c;z).$$

Для нахождения решений гипергеометрического уравнения с заданной асимптотикой в бесконечности применим дробно-линейное преобразование $t=1/z$:

$$P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & a & z \\ 1-c & c-a-b & b & \end{array}\right\} = P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ a & 0 & 0 & 1/z \\ b & c-a-b & 1-c & \end{array}\right\} =$$
$$= \frac{1}{z^a}P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & a & 1/z \\ b-a & c-a-b & 1-c+a & \end{array}\right\},$$

откуда получаем существование решения гипергеометрического уравнения (2) вида

$$y=z^{-a}F\left(a,1-c+a;1+a-b;z^{-1}\right).$$

Другое решение в бесконечности можно получить, меняя местами параметры a и b. Аналогично находятся решения с данными асимптотиками при $z\to 1$. Они имеют вид

$$F(a,b;a+b+1-c;1-z) \qquad \text{и} \qquad (1-z)^{c-a-b}F(c-b,c-a;c-a-b+1;1-z).$$

Еще одно очевидное преобразование

$$
\begin{aligned}
&P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & a & z \\ 1-c & c-a-b & b & \end{array}\right\} = (z-1)^{c-a-b} P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & a+b-c & c-b & z \\ 1-c & 0 & c-a & \end{array}\right\} = \\
=&(z-1)^{c-a-b} P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & c-b & z \\ 1-c & a+b-c & c-a & \end{array}\right\}.
\end{aligned} \tag{3}
$$

доказывает тождество Эйлера

$$
F(a,b;c;z) = (1-z)^{c-a-b} F\left(c-a, c-b; c; z\right).
$$

В самом деле, левая часть равенства (3) говорит о том, что у гипергеометрического уравнения (2) есть единственное решение $y(z)$, регулярное в нуле, такое что $y(0)=1$. Это решение есть $y = F(a,b;c;z)$. Правая часть равенства (3) также предоставляет такое решение, равное $(1-z)^{c-a-b} F\left(c-a, c-b; c; z\right)$.

2. Выведем гипергеометрическое уравнение, пользуясь лишь интегральным представлением для гипергеометрической функции. Технически это несколько более удобно сделать, произведя вначале в интеграле $\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt$ замену переменной $w = t^{-1}$, так что гипергеометрический интеграл примет вид

$$
\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt = \int_1^\infty w^{a-c}(w-1)^{c-b-1}(w-z)^{-a}dw.
$$

Обозначим через $g(z,w)$ подинтегральную функцию

$$
g(z,w) = w^{a-c}(w-1)^{c-b-1}(w-z)^{-a},
$$

через L дифференциальный оператор второго порядка

$$
L = z(1-z)\frac{d^2}{dz^2} + \left(c-(a+b+1)z\right)\frac{d}{dz} - ab\cdot 1.
$$

Для вывода гипергеометрического уравнения достаточно показать, что $Lg(z,w)$ есть полная производная, а именно, существует такая функция $V(z,w)$, что

$$
Lg(z,w) = \frac{d}{dw}V(z,w) \tag{4}
$$

и $\lim_{w\to 1} V(z,w) = \lim_{w\to\infty} V(z,w) = 0$ в некоторой области параметров a,b,c. В самом деле, в этом случае по формуле Ньютона-Лейбница несобственный интеграл $\int_1^\infty Lg(z,w)dw$ будет стремится к разности граничных значений $V(z,w)$, раной нулю:

$$
L\left(\int_1^\infty g(z,w)dw\right) = \int_1^\infty Lg(z,w)dw = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{A\to\infty}\left(V(A) - V(1+\varepsilon)\right) = 0.
$$

Положим

$$
V(z,w) = aw^{a-c+1}(w-1)^{c-b}(w-z)^{-a-1}.
$$

Нетрудно видеть, что соотношения $\lim_{w\to 1} V(z,w)=0$, $\lim_{w\to\infty} V(z,w)=0$ выполняются при условии $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$. Имеем:

$$Lg(z,w)=\left\{\frac{z(1-z)a(a+1)}{(w-z)^2}+\frac{[c-(a+b+1)z]a}{w-z}-ab\right\}g(z,w),$$

$$\frac{d}{dw}V(z,w)=a\left\{\frac{(a-c+1)(w-1)}{w-z}+\frac{(c-b)w}{w-z}-\frac{(a+1)w(w-1)}{(w-z)^2}\right\}g(z,w),$$

так что остается проверить тождество

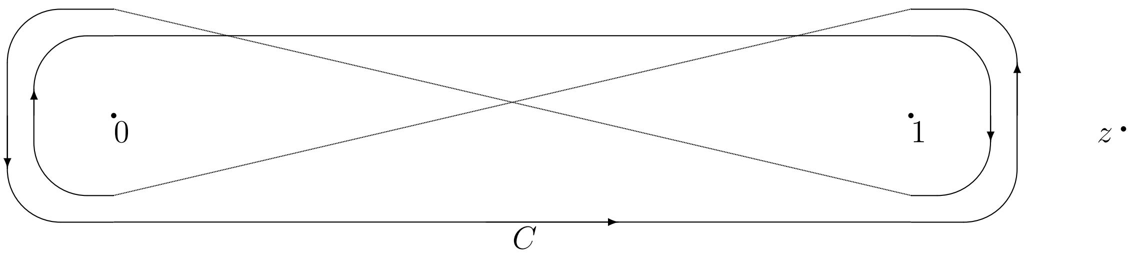
$$\frac{z(1-z)(a+1)}{(w-z)^2}+\frac{[c-(a+b+1)z]}{w-z}-b=\frac{(a-c+1)(w-1)}{w-z}+\frac{(c-b)w}{w-z}-\frac{(a+1)w(w-1)}{(w-z)^2},$$

что нетрудно сделать, заметив для начала, что разность первого слагаемого в левой части равенства и последнего в правой равна $\frac{(a+1)(z+w-1)}{w-z}$.

Равенство (4) доказано чисто формально. Поэтому интеграл по замкнутому контуру C

$$\int_C g(z,w)dw$$

является решением гипергеометрического уравнения, как только этот интеграл определен и подинтегральное выражение является однозначной функцией на контуре интегрирования. Мы использовали в качестве контура луч $(0,1)$ с ограничением $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$ на параметры. Однако, можно в качестве замкнутого контура можно выбирать топологически нетривиальные петли, при ограничении на которые многозначные функции w^{a-c}, $(w-1)^{c-b-1}$ и $(w-z)^{-a}$ остаются однозначными. Например, годится двойная петля вокруг точек 0 и 1, оставляющая точку z снаружи:



В самом деле, при полном обходе контура аргументы w и $w-1$, а также $w-z$, если z находится вне контура, не получают приращений, что ведет к однозначности ограничений на контур функций w^{a-c}, $(w-1)^{c-b-1}$ и $(w-z)^{-a}$. Таким образом, интеграл

$$\int_C w^{a-c}(w-1)^{c-b-1}(w-z)^{-a}dw$$

является решением уравнения (2) при любых значениях параметров a,b,c. В интеграле можно перейти к исходной переменной t, контур C превратится при этом в (большую) двойную петлю вокруг нуля и бесконечности.

Устремив z к бесконечности, мы видим, что лидирующая асимптотика подинтегрального выражения равна $(-z)^{-a}$. Более внимательный анализ показывает, что получившееся таким образом решение пропорционально $(-z)^{-a}F\left(a, 1-c+a; 1+a-b; z^{-1}\right)$ с коэффициентом пропорциональности, равным

$$\int_C w^{a-c}(w-1)^{c-b-1}dw = 4\sin\pi(a-c)\sin(c-b)\int_0^1 w^{a-c}(w-1)^{c-b-1}dw =$$

$$4\sin\pi(a-c)\sin(c-b)\frac{\Gamma(a-c+1)\Gamma(c-b)}{\Gamma(a-b+1)} = \frac{-4\pi^2}{\Gamma(a-b+1)\Gamma(b-c+1)\Gamma(c-a)}$$

(см. Уиттекер, Ватсон, т.2 \$ 12.5).