Математические основы естествознания

Статистическая физика

Листок СФ-2. Каноническое распределение. Статистическая сумма.

Обязательные задачи: 1, 2, 3, 4а.

1. Найти среднее значение и среднеквадратичное отклонение абсолютной величины скорости молекулы азота, если газ находится при температуре 300 К. (Указания: воспользоваться распределением Максвелла. Постоянная Больцмана $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К, массу молекулы азота считать равной $5 \cdot 10^{-26}$ кг.)

2. Доказать формулу
$$D(E) = T^2 \frac{\partial}{\partial T}\left(T^2 \frac{\partial \log Z}{\partial T}\right)$$
для дисперсии энергии системы со статистической суммой Z в каноническом ансамбле.

3. Найти статистическую сумму и среднюю энергию при температуре T для
   а) гармонического осциллятора с гамильтонианом $H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$,
   б) системы с невырожденными уровнями энергии $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$, $n = 0, 1, 2, ...$ (квантового гармонического осциллятора).

4. Рассмотрим систему N магнитных моментов σ_i, каждый из которых может принимать два значения: $\sigma_i = \pm 1$. Энергия конфигурации $\{\sigma_i\} = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N\}$ равна
$$E(\{\sigma_i\}) = J \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \sigma_{i+1} + H \sum_{i=1}^{N} \sigma_i$$
(здесь J – константа взаимодействия двух соседних моментов, H – внешнее магнитное поле, и наложено периодическое граничное условие $\sigma_{N+1} = \sigma_1$). Эта модель называется одномерной моделью Изинга. В предположении, что система находится в контакте с термостатом при температуре T, найти следующие величины как функции N, J, H, T:
   а) статистическую сумму и среднюю энергию,
   б) дисперсию энергии и теплоемкость,
   в) среднее значение и дисперсию намагниченности $M = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i$,
   г)* корреляционную функцию $\langle \sigma_n \sigma_m \rangle$ в пределе $N \to \infty$.

5. Получить распределение вероятностей состояний a с энергиями E_a из условия экстремальности энтропии, определенной по Больцману как $S = -\sum_a p_a \log p_a$, при дополнительных условиях $\sum_a p_a = 1$ (нормировка вероятностей) и $\sum_a p_a E_a = E$ (фиксированная средняя энергия). Ответ сравнить с каноническим распределением.