Пусть X и Y — конечномерные векторные пространства над $\mathbb{R}$, снабженные нормами. Пространство $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(X,Y)$ линейных операторов из X в Y будет в дальнейшем обозначаться через $L(X,Y)$. Положим также $L(X)=L(X,X)$. Тождественный оператор в X будет обозначаться через $\mathbf{1}_X$ или просто $\mathbf{1}$.

15.1. Пусть $A \in L(X,Y)$.
1) Докажите, что $\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\| < \infty$.
2) Докажите, что sup из п. 1 достигается.
3) Докажите, что существует такое $C \geqslant 0$, что $\|Ax\| \leqslant C\|x\|$ для всех $x \in X$, и что среди таких C есть наименьшее.
4) Докажите равенства

$$\min\bigl\{C \geqslant 0 : \|Ax\| \leqslant C\|x\| \ \forall x \in X\bigr\} = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\| = \sup_{\|x\|=1}\|Ax\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \tag{1}$$

(второе и третье — в предположении, что $X \neq 0$).

Определение 15.1. Число, фигурирующее в (1), называется *нормой* линейного оператора $A\colon X \to Y$ и обозначается $\|A\|$.

Из п. 4 предыдущей задачи следует, что $\|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\|$ для всех $x \in X$.

15.2. 1) Докажите, что операторная норма действительно является нормой на $L(X,Y)$.
2) Докажите, что $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$ для всех $A \in L(Y,Z)$, $B \in L(X,Y)$. Отсюда, в частности, следует, что $\|A^n\| \leqslant \|A\|^n$ для всех $A \in L(X)$ и $n \in \mathbb{N}$.

15.3. 1) Докажите, что множество обратимых операторов открыто и всюду плотно в $L(X)$.
2) Докажите, что $\det(AB - t\mathbf{1}) = \det(BA - t\mathbf{1})$ для всех $A, B \in L(X)$ и $t \in \mathbb{R}$.

15.4. Докажите, что если $A \in L(X)$ и $\|A\| < 1$, то оператор $\mathbf{1} - A$ обратим, и

$$(\mathbf{1} - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

Определение 15.2. Пусть $A \in L(X)$. Положим

$$e^A = \exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}. \tag{2}$$

15.5. 1) Докажите, что ряд (2) сходится для всех $A \in L(X)$.
2) Докажите, что если $AB = BA$, то $e^{A+B} = e^A e^B$.
3) Верно ли предыдущее утверждение для произвольных $A, B \in L(X)$?

15.6. Вычислите матрицу оператора e^{tA}, если оператор A имеет матрицу

$$\mathbf{1)}\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix},\quad \mathbf{2)}\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \mathbf{3)}\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad \mathbf{4)}\ \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

15.7. 1) Пусть P_n — пространство многочленов степени не выше n и $D\colon P_n \to P_n$ — оператор дифференцирования. Как действует оператор e^{tD}?
2) Каким свойством должно обладать конечномерное пространство функций на прямой, чтобы для него сохранял силу результат п. 1? Приведите какой-нибудь пример такого пространства.

15.8. Докажите, что $\dfrac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$ для любого $A \in L(X)$.

15.9. Докажите, что $\det(e^A) = e^{\operatorname{tr} A}$ для любого $A \in L(X)$.