16.1$^{\mathrm{O}}$. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^2$ — открытое множество, $(x_0, y_0) \in U$, и пусть функция $F \in C^2(U)$ такова, что $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Пусть $y = f(x)$ — функция, неявно заданная уравнением $F(x, y) = 0$ в окрестности (x_0, y_0) (см. лекцию). Выразите $f''(x_0)$ через частные производные функции F.

16.2$^{\mathrm{O}}$. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^3$ — открытое множество, $F \in C^1(U)$, и частные производные F не обращаются в нуль в некоторой точке. Пусть $x = x(y, z)$, $y = y(z, x)$, $z = z(x, y)$ — функции, неявно заданные уравнением $F(x, y, z) = 0$. Найдите $\dfrac{\partial x}{\partial y} \dfrac{\partial y}{\partial z} \dfrac{\partial z}{\partial x}$.

16.3. Найдите производные первого и второго порядков функций $y = y(x)$, неявно заданных уравнениями **1)**$^{\mathrm{O}}$ $y - \dfrac{1}{2}\sin y = x$; **2)** $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

16.4$^{\mathrm{O}}$. Нарисуйте кривые, заданные уравнениями из предыдущей задачи.

16.5. Исследуйте на экстремум функции $z = z(x, y)$, неявно заданные уравнениями
1)$^{\mathrm{O}}$ $z^3 - xyz + y^2 + 4x^2 = 16$; **2)** $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z = 2$.

16.6. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^2$ — открытое множество, $F \in C^3(U)$, $(x_0, y_0) \in U$, $F(x_0, y_0) = F'_x(x_0, y_0) = F'_y(x_0, y_0) = 0$, но $F''_{yy}(x_0, y_0) \neq 0$. Предположим, что квадратное уравнение

$$F''_{yy}(x_0, y_0)t^2 + 2F''_{xy}(x_0, y_0)t + F''_{xx}(x_0, y_0) = 0$$

имеет два различных действительных корня t_1, t_2. Докажите, что в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) множество решений уравнения $F(x, y) = 0$ представляет собой объединение графиков двух дифференцируемых функций («ветвей») $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$, пересекающихся в единственной точке (x_0, y_0), причем $y'_1(x_0) = t_1$ и $y'_2(x_0) = t_2$.

16.7. Нарисуйте следующие кривые, укажите промежутки возрастания и убывания соответствующих неявно заданных функций $y = y(x)$ и найдите угловые коэффициенты касательных в точках самопересечения этих кривых:
1) $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$; **2)** $(x^2 + y^2)^2 = 3x^2y - y^3$.