Задачи по группам и алгебрам Ли – 6

Задача без звездочки (со всеми пунктами) оценивается в 1 балл, задача со звездочкой – в 2 балла. Оценка за листок есть максимум из суммы баллов за задачи без звездочки и суммы баллов за задачи со звездочкой. Таким образом, для получения оценки 10 за листок надо решить либо все задачи без звездочки, либо все задачи со звездочкой.

1. Покажите, что форма Киллинга на алгебре Ли инвариантна относительно всех ее дифференцирований, т.е для любого дифференцирования $D: L \to L$ имеем $K(D(x), y) + K(x, D(y)) = 0$. *Указание:* пусть $D: L \to L$ – дифференцирование, тогда $\mathrm{ad}(D(x)) = D \circ \mathrm{ad}\, x - \mathrm{ad}\, x \circ D$.

2. Покажите, что все инвариантные билинейные формы на простой комплексной алгебре Ли пропорциональны.

3. Для конечномерного представления (V, ρ) алгебры Ли $\mathfrak{g}$ определим симметрическую билинейную форму Φ_V на пространстве $\mathfrak{g}$ следующей формулой: $\Phi_V(x, y) := \mathrm{tr}\, \rho(x)\rho(y)$. **а)** Докажите, что это инвариантная форма на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. **б)** Вычислите Φ_V для всех неприводимых представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

4. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – базис в полупростой компактной алгебре Ли $\mathfrak{g}$, ортонормированный относительно формы Киллинга. Докажите, что *элемент Казимира* $C = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ не зависит от выбора ортонормированного базиса и лежит в центре универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$.

5. Докажите, что на нетривиальном неприводимом комплексном представлении V связной полупростой компактной группы Ли G оператор Казимира C действует ненулевым скаляром. *Указание:* докажите, что $\langle Cv, v\rangle \neq 0$ для всякого вектора $v \in V$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – инвариантное эрмитово скалярное произведение на V.

6. Укажите какой-нибудь максимальный тор в группе Ли $SO_n(\mathbb{R})$.

7. а) Докажите, что для всякой компактной группы G ее образ $\mathrm{Ad}(G)$ в присоединенном представлении имеет тривиальный центр. **б)** Докажите, что центр полупростой компактной группы конечен.

8. Докажите, что центр компактной группы есть пересечение всех ее максимальных торов.

9. Докажите, что централизатор любого тора в связной компактной группе Ли связен.

10. Найдите решетку весов и корни группы Ли **а)** SU_2; **б)** $SO_3(\mathbb{R})$; **в)** $SO_4(\mathbb{R})$; **г)** SU_3.

11*. Приведите пример связной вещественной группы Ли, в которой не всякий элемент лежит в какой-либо однопараметрической подгруппе.

12*. а) Докажите, что группа $Sp_{2n}(\mathbb{C})$ связна, односвязна и проста. **б)** Докажите, что группа унитарных кватернионных матриц $Sp_n := \{A \in GL_n(\mathbb{H}) | A\overline{A}^T = E\}$ (где черта означает сопряжение в кватернионах) является компактной формой группы $Sp_{2n}(\mathbb{C})$.

13*. Постройте следующие (универсальные) накрытия простых комплексных групп Ли: **а)** $SL_4(\mathbb{C}) \to SO_6(\mathbb{C})$; **б)** $Sp_4(\mathbb{C}) \to SO_5(\mathbb{C})$.

14*. *(Группа G_2)* Алгебра октав $\mathbb{O}$ – неассоциативная вещественная алгебра, состоящая из пар кватернионов (a, b) с умножением $(a, b)(c, d) = (ac - d\bar{b}, \bar{a}d + cb)$ (где черта обозначает сопряжение в кватернионах: $\overline{(x + iy + jz + kt)} = x - iy - jz - kt$). **а)** Докажите, что любая тройка попарно антикоммутирующих элементов $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{O}$ такая, что $s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = -1$ и $(s_1 s_2) s_3 = -s_3(s_1 s_2)$, порождает $\mathbb{O}$. **б)** Докажите, что группа автоморфизмов алгебры октав является компактной полупростой группой Ли.

15*. Докажите, что группа Ли G_2 изоморфна стабилизатору в $GL_7(\mathbb{R})$ кососимметрической трилинейной формы на $\mathbb{R}^7$ (общего положения).