Глава 15

Пространства модулей рациональных кривых с отмеченными точками

В предыдущей главе мы описали процедуру построения пространств модулей кривых с отмеченными точками. Эти пространства, как правило, некомпактны. Ключевым моментом в понимании геометрии некомпактных пространств является построение их компактификаций. У каждого некомпактного пространства много различных компактификаций, однако лишь немногие из них удобны для работы.

В этой главе мы описываем геометрическую конструкцию пространства модулей $\mathcal{M}_{0;n}$, принадлежащую М. Капранову. В его конструкции всякая рациональная кривая с n отмеченными точками реализуется как кривая Веронезе в проективном пространстве размерности $n-2$, проходящая через фиксированный набор из n точек в общем положении. Вырождения кривых Веронезе уже не являются гладкими кривыми, и соответствующие этим особым кривым точки и добавляются к пространству модулей гладких кривых для его компактификации.

Геометрическая конструкция Капранова не дает инструмента для вычисления гомологических характеристик компактифицированных пространств модулей. Подобное вычисление требует более абстрактного подхода, и мы приводим описание кольца когомологий по Килю. Результат Концевича и Манина, дающий набор образующих и линейных соотношений на них в пространствах когомологий каждой размерности, дополняет описание Киля. Впрочем, и описание Киля, и описание Концевича–Манина не слишком эффективны, и поиски более явных описаний колец когомологий пространств $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ продолжаются до сих пор.

15.1 Конструкция Капранова

В этом параграфе мы изложим принадлежащую М. Капранову простую реализацию пространства модулей рациональных кривых как семейств кривых Веронезе в проективных пространствах. Каждая кривая семейства проходит через фиксированный набор точек, которые и образуют отмеченные точки на кривой.

Рассмотрим сначала проективную плоскость. Набор точек на ней находится в общем положении, если никакие три точки из этого набора не лежат на одной прямой. *Коника* — это кривая второго порядка на плоскости, т.е. кривая, задаваемая однородным уравнением

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = 0.$$

Она пересекает любую прямую в двух точках (совпадающих, если прямая касается коники).

Напомним, что гладкая коника рациональна — ее можно задать как образ однозначного отображения проективной прямой. Для этого достаточно выбрать точку на конике и сопоставить каждой прямой, проходящей через эту точку, вторую точку пересечения этой прямой с коникой.

Если мы фиксируем 5 точек в общем положении, то через них проходит единственная коника — такие 5 точек задают пять линейных уравнений на коэффициенты a, b, c, d, e, f уравнения коники, по которым эти коэффициенты восстанавливаются однозначно с точностью до умножения на общий ненулевой множитель. А через 4 точки x_1, x_2, x_3, x_4 в общем положении проходит однопараметрическое семейство гладких коник. Это однопараметрическое семейство естественным образом отождествляется с пространством модулей $\mathcal{M}_{0;4}$. Для доказательства нам нужно показать, что любая рациональная кривая с 4 отмеченными точками встречается в этом семействе ровно один раз.

Вспомним, что любую четверку точек в общем положении в $\mathbb{CP}^2$ можно перевести в любую другую такую четверку проективным преобразованием проективной плоскости, причем такое проективное преобразование единственно. Таким образом, с точки зрения проходящих через них коник любые две четверки точек на плоскости в общем положении ничем не отличаются друг от друга.

Рассмотрим двойственную проективную плоскость к $\mathbb{CP}^2$, т.е. пространство прямых в $\mathbb{CP}^2$. Пересечение прямой в $\mathbb{CP}^2$ с коникой C сопоставляет этой прямой пару точек коники C, отождествляя тем самым двойственную проективную плоскость с симметрическим квадратом $S^2(C)$ кривой C. Изоморфизм кривых C и C' индуцирует изоморфизм их симметрических квадратов, т.е проективное преобразование двойственной проективной плоскости. Двойственное ему проективное преобразование плоскости $\mathbb{CP}^2$ сохраняет 4 точки, а значит, является тождественным преобразованием. Тем самым, кривые C и C' совпадают, что и требовалось доказать.

К сожалению, рассуждение про коники не обобщается напрямую на проективные пространства большей размерности. Проблема в том, что начиная с размерности $m = 3$ кривая в $\mathbb{CP}^m$ уже не является, вообще говоря, полным пересечением, т.е. не задается системой из $m-1$ независимых полиномиальных уравнений. Поэтому кривые в пространствах больших размерностей удобно рассматривать как образы вложений.

Отображением Веронезе проективной прямой в проективное пространство $\mathbb{CP}^{n-2}$ называется отображение

$$(t_0 : t_1) \mapsto (t_0^{n-2} : t_0^{n-2}t_1 : t_0^{n-3}t_1^2 : \cdots : t_1^{n-2}),$$

заданное мономами степени $n-2$. Степень такой кривой равна $n-2$, т.е. совпадает с размерностью пространства, куда она вложена. В аффинной карте отображение Веронезе имеет вид $t \mapsto (t, t^2, \ldots, t^{n-2})$. Очевидно, что оно является изоморфизмом на образ. Очевидно также, что образы любых n различных точек на проективной прямой при отображении Веронезе находятся в общем положении, т.е. никакие $n-1$ из них не лежат в одной гиперплоскости. (Это сразу же вытекает из того, что отличен от нуля определитель Вандермонда.) Результаты проективных преобразований образа отображения Веронезе будем называть *кривыми Веронезе* (они также называются *рациональными нормальными кривыми*).

Так, гладкие коники на плоскости это кривые Веронезе при $n = 4$. При $n = 5$ кривые Веронезе называются *скрученными кубиками* в проективном пространстве.

Рассуждения для коник на плоскости без изменений переносятся на кривые Веронезе в пространствах большей размерности. Зафиксируем n точек $x_1, \ldots, x_n$ в общем положении в проективном пространстве $\mathbb{CP}^{n-2}$. Через точки $x_1, \ldots, x_n$ проходит $(n-3)$-мерное семейство кривых Веронезе. На каждой кривой этого семейства точки $x_1, \ldots, x_n$ образуют набор отмеченных точек.

Теорема 15.1.1. *Семейство кривых Веронезе, проходящих через данные точки $x_1, \ldots, x_n$ в общем положении в $\mathbb{CP}^{n-2}$, изоморфно пространству модулей $\mathcal{M}_{0;n}$.*

Поскольку любой набор из n точек в общем положении в $\mathbb{CP}^{n-2}$ можно перевести в любой другой проективным преобразованием, ясно, что любая рациональная кривая с n отмеченными точками реализуется кривой Веронезе, содержащей точки $x_1, \ldots, x_n$. Повторяя наше рассуждение для случая плоскости, докажем, что никакая кривая не встречается в таком семействе дважды. Рассмотрим двойственное проективное пространство к $\mathbb{CP}^{n-2}$. Оно состоит из гиперплоскостей в $\mathbb{CP}^{n-2}$. Пересечение гиперплоскости в $\mathbb{CP}^{n-2}$ с кривой Веронезе C сопоставляет этой гиперплоскости набор из $n-2$ точек кривой C, отождествляя тем самым двойственное проективное пространство с $(n-2)$-й симметрической степенью $S^{n-2}(C)$ кривой C. Изоморфизм кривых C и C' индуцирует изоморфизм их $(n-2)$-х симметрических степеней $S^{n-2}(C)$ и $S^{n-2}(C')$, т.е проективное преобразование двойственного проективного пространства. Двойственное ему проективное преобразование пространства $\mathbb{CP}^{n-2}$ сохраняет n точек $x_1, \ldots, x_n$, а значит, является тождественным преобразованием. Тем самым, кривые C и C' совпадают, что и требовалось доказать.

Упражнение 15.1.2. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — попарно различные точки проективной прямой, $n \geq 3$. Рассмотрим векторное пространство $\Omega^1(x_1 + \cdots + x_n)$, состоящее из рациональных 1-форм на проективной прямой, имеющих в точках $x_1, \ldots, x_n$ полюса не выше первого порядка. а) Докажите, что размерность этого пространства равна $n-1$. б) Докажите, что образ отображения проективной прямой в проективизацию пространства, двойственного к $\Omega^1(x_1 + \cdots + x_n)$, переводящее точку x в функционал $\omega \mapsto \omega(x)$, является кривой Веронезе.

15.2 Компактификация пространства модулей

Капранов заметил, что кривые Веронезе позволяют построить компактификацию пространства модулей рациональных кривых с отмеченными точками.

Пример 15.2.1. Рассмотрим в примере с $n = 2$ семейство *всех* плоских коник, проходящих через данные четыре точки, не ограничиваясь гладкими. Это означает, что мы должны добавить к уже рассмотренному семейству коники, каждая из которых представляет собой пару прямых, соединяющих данные точки попарно. Таких коник три — в зависимости от того, с какой точкой мы соединяем прямой точку x_1. Тем самым, мы построили замыкание пространства $\mathcal{M}_{0;4}$, отождествив это замыкание с проективной прямой в пространстве однородных форм степени 2 на плоскости. Эта проективная прямая состоит из форм, обращающихся в нуль в каждой из точек x_1, x_2, x_3, x_4. Мы будем обозначать это компактифицированное пространство через $\overline{\mathcal{M}}_{0;4}$.

Мы видим из примера, что для построения компактификации пространства модулей рациональных кривых с отмеченным точками нам требуется добавлять к этому пространству точки, отвечающие особым кривым. При этом добавляемые в примере особые кривые представляют собой пары проективных прямых, пересекающихся в одной точке, а отмеченные точки расположены по две на каждой из прямых и не совпадают с точкой их пересечения.

Пусть у нас имеется конечный набор рациональных кривых, некоторые из которых попарно пересекаются. Эти кривые образуют особую кривую и являются ее *неприводимыми компонентами*. Несвязное объединение неприводимых компонент называется *нормализацией* особой кривой. Сопоставим особой кривой граф (называемый *графом неприводимых компонент*, или *модулярным графом*), вершины которого взаимно однозначно соответствуют неприводимым компонентам, причем две вершины соединены ребром, если соответствующие им прямые пересекаются (количество ребер, соединяющих вершины, равно количеству пересечений соответствующих прямых). Исходный набор рациональных кривых называется *рациональной нодальной кривой*, если построенный граф оказывается деревом.

Определение 15.2.2. Рациональная нодальная кривая с n отмеченными точками называется *модулярно стабильной*, если

- ни одна из этих точек не лежит в точках пересечения неприводимых компонент кривой;
- ее группа автоморфизмов конечна, т.е. на каждой неприводимой компоненте есть по крайней мере три специальные точки (отмеченные точки или точки пересечения с другими компонентами).

В дальнейшем мы будем опускать слово “модулярно” и говорить просто о стабильных кривых.

В случае коник на плоскости добавляемые к пространству модулей при компактификации кривые стабильны — каждая из них представляет собой пару пересекающихся прямых с тремя специальными точками.

Для случая произвольной размерности компактификация строится аналогичным образом — к пространству кривых Веронезе добавляются предельные особые кривые. Они стабильны, однако в отличие от двумерного случая не допускают простого определения. Причина состоит в том, что в старших размерностях кривые Веронезе уже не являются полными пересечениями.

Пример 15.2.3. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — точки общего положения в трехмерном проективном пространстве. Посмотрим, какие особые кривые добавляются к пространству модулей $\mathcal{M}_{0;5}$ при компактификации.

Проведем прямую через точки x_1, x_2. Эта прямая пересекает плоскость, проходящую через точки x_3, x_4, x_5, в некоторой точке, отличной от каждой из исходных точек. При замыкании к пространству гладких кривых добавляются особые кривые, состоящие из прямой, проходящей через x_1, x_2, и коники, проходящей через точки x_1, x_2, x_3 и точку пересечения прямой и плоскости. Как мы знаем, семейство таких коник (а значит, и семейство особых кривых такого вида) одномерно. При вырождении коники в пару прямых наша особая кривая вырождается в тройку прямых в пространстве, одна из которых пересекает две другие. Эта средняя прямая содержит одну отмеченную точку, а каждая из оставшихся двух прямых содержит по две отмеченные точки. Распределение отмеченных точек по прямой и конике, а также по всем прямым тройки может быть произвольным — с сохранением их количества.

Теорема 15.2.4. *Каждая стабильная рациональная кривая с n отмеченными точками единственным образом реализуется как стабильная кривая, проходящая через данный набор точек $x_1, \dots, x_n$ в общем положении в $\mathbb{CP}^{n-2}$.*

Для доказательства необходимо распространить понятие отображения Веронезе на особые стабильные кривые. Мы уже видели, что для гладких рациональных кривых с отмеченными точками отображение Веронезе совпадает с отображением, задаваемым мероморфными 1-формами с полюсами не выше первого порядка в отмеченных точках. Перенесем эту конструкцию на особые кривые.

Пусть $(C; x_1, \dots, x_n)$ — стабильная рациональная кривая. Рассмотрим пространство мероморфных 1-форм на C, имеющих полюса не выше первого порядка в точках $x_1, \dots, x_n$ и не имеющих других полюсов, за исключением, быть может, полюсов первого порядка в двойных точках. Каждая такая 1-форма определяет набор мероморфных 1-форм на неприводимых компонентах особой кривой. Мы требуем, чтобы *сумма вычетов этих* 1-*форм на двух прообразах одной и той же двойной точки равнялась* 0.

Пространство таких мероморфных 1-форм $(n-1)$-мерно, поэтому набор из $n-1$ таких линейно-независимых форм определяет отображение кривой в проективное пространство $\mathbb{CP}^{n-2}$. Его мы и будем называть отображением Веронезе для особых кривых. Нетрудно видеть, что образы точек $x_1, \dots, x_n$ при этом отображении находятся в общем положении. Дальнейшее доказательство теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 15.1.1. Мы отсылаем читателя к [?] за деталями.

Упражнение 15.2.5. Докажите, что канонический образ гиперэллиптической кривой рода g является кривой Веронезе в $\mathbb{CP}^{g-1}$.

Упражнение 15.2.6. Рассмотрим стабильную рациональную кривую в $\mathbb{CP}^3$, представляющую собой объединение прямой с двумя отмеченными точками и коники с тремя отмеченными точками, трансверсально пересекающихся в одной точке. Постройте голоморфное однопараметрическое семейство (параметризованное проколотым диском) скрученных кубик, проходящих через пять отмеченных точек, предельным элементом которого (отвечающим точке прокола) является наша особая кривая.

Замечание 15.2.7. Формальное доказательство корректности приведенного определения компактифицированного пространства модулей $\overline{\mathcal{M}}_{0;n}$ требует использования формализма схем Гильберта, см. предыдущую главу.

Многочлены Гильберта всех гладких кривых Веронезе в $\mathbb{CP}^{n-2}$ одинаковы, и Капранов определяет компактифицированное пространство модулей $\overline{\mathcal{M}}_{0;n}$ как замыкание в соответствующей схеме Гильберта пространства кривых Веронезе, проходящих через выбранные n точек в общем положении. Дальнейшее рассуждение требует проверки того, что многочлены Гильберта у особых кривых Веронезе такие же, как и у гладких, и все подмногообразия с таким многочленом Гильберта имеют указанный вид.

Упражнение 15.2.8. Найдите многочлен Гильберта кривой Веронезе в $\mathbb{CP}^{n-2}$. Докажите, что особые кривые Веронезе имеют тот же многочлен Гильберта. Проверьте, что всякая кривая (на самом деле, всякое подмногообразие) с тем же многочленом Гильберта является стабильной кривой Веронезе.

15.3 Многочлены Пуанкаре пространств модулей

Пусть X — компактное топологическое пространство. Его *многочлен Пуанкаре* это многочлен

$$P_X(t) = b_d t^d + \cdots + b_0,$$

где $b_i = b_i(X) = \dim(H_i(X, \mathbb{C}))$ — i-е число Бетти пространства X, $d = \dim X$. Тем самым, многочлен Пуанкаре дает грубое описание топологии пространства X. Например, многочлен Пуанкаре комплексной проективной прямой (являющейся с топологической точки зрения двумерной сферой) равен

$$P_{\mathbb{CP}^1}(t) = t^2 + 1.$$

Поскольку $\overline{\mathcal{M}}_{0;4} = \mathbb{CP}^1$, этот многочлен является и многочленом Пуанкаре $P_{\overline{\mathcal{M}}_{0;4}}(t)$ пространства модулей стабильных рациональных кривых с четырьмя отмеченными точками.

Пусть теперь X — топологическое пространство, представимое в виде $X = X_1 \setminus X_2$, где $X_2 \subset X_1$ — два компактных алгебраических многообразия. Определим *мотивный многочлен Пуанкаре* пространства X равенством

$$P_X(t) = P_{X_1}(t) - P_{X_2}(t).$$

Скажем, многочлен Пуанкаре пространства модулей $\mathcal{M}_{0;4}$ есть

$$P_{\mathcal{M}_{0;4}}(t) = P_{\overline{\mathcal{M}}_{0;4}}(t) - 3P_{\{\cdot\}}(t) = (t^2+1) - 3 = t^2 - 2.$$

Оказывается, что так введенное понятие мотивных когомологий определено корректно — любые два представления пространства X в виде разности компактных алгебраических многообразий приводят к одному и тому же мотивному многочлену Пуанкаре.

Многочлен Пуанкаре естественным образом ведет себя относительно операций над многообразиями — объединения, взятия прямого произведения. Воспользуемся этим, чтобы вычислить многочлен Пуанкаре пространства модулей $\mathcal{M}_{0;n}$ для любого n. Для этого вспомним индуктивную конструкцию пространства $\mathcal{M}_{0;n+1}$.

Зафиксируем на проективной прямой $\mathbb{CP}^1$ координату и рассмотрим прямое произведение $\mathcal{M}_{0;n} \times \mathbb{CP}^1$. В каждом одномерном слое проекции этого прямого произведения на первый сомножитель выколем точки $x_1, \ldots, x_n$, предполагая, что значения координаты точек x_1, x_2, x_3 равны, соответственно, $\infty, 0$ и 1. При этом значения координат остальных точек однозначно определяются классом проективной эквивалентности всего набора $x_1, \ldots, x_n$. В результате n отмеченных точек зададут n сечений прямого произведения

$$\xi_i : \mathcal{M}_{0;n} \to \mathcal{M}_{0;n} \times \mathbb{CP}^1\,.$$

Дополнение к этим сечениям в прямом произведении естественно изоморфно пространству модулей $\mathcal{M}_{0;n+1}$. Действительно, каждая точка в этом дополнении, при добавлении к n выколотым точкам слоя, определяет набор из $n+1$ точек на рациональной кривой с точностью до проективной эквивалентности. Наоборот, любой набор из $n+1$ попарно различных точек однозначно реализуется таким образом — нужно посмотреть на слой, отвечающий набору из первых n точек.

Тем самым, для каждого n определено отображение забывания $\pi : \mathcal{M}_{0;n+1} \to \mathcal{M}_{0;n}$, расслаивающее очередное пространство модулей над предыдущим. Каждый слой этого отображения является рациональной кривой с n проколами, что позволяет нам вычислить многочлены Пуанкаре пространств модулей гладких кривых:

Утверждение 15.3.1. *Многочлен Пуанкаре пространства $\mathcal{M}_{0;n}$ равен*

$$P_{\mathcal{M}_{0;n}}(t) = (t^2-2)(t^2-3)\dots(t^2-n+3).$$

Действительно, многочлен Пуанкаре расслоенного пространства является произведением многочленов Пуанкаре слоя и базы.

Компактифицированные пространства модулей склеены из кусочков, каждый из которых является произведением некомпктифицированных пространств модулей. Эта конструкция позволяет вычислять многочлены Пуанкаре компактифицированных пространств.

Пример 15.3.2. Вычислим многочлен Пуанкаре пространства модулей $\overline{\mathcal{M}}_{0;5}$. Это пространство является несвязным объединением следующих пространств:

- пространства модулей гладких кривых $\mathcal{M}_{0;5}$;
- пространств модулей стабильных кривых с одной особой точкой; каждое такое пространство представляет собой прямое произведение пространств $\mathcal{M}_{0;3} \times \mathcal{M}_{0;4}$ (на одной неприводимой компоненте кривой имеется две отмеченные точки, на другой — три, и на каждой из компонент дополнительно имеется точка пересечения с другой компонентой);
- пространств модулей стабильных кривых с двумя особыми точками; каждое такое пространство представляет собой прямое произведение пространств $\mathcal{M}_{0;3} \times \mathcal{M}_{0;3} \times \mathcal{M}_{0;3}$.

Для подсчета многочлена Пуанкаре пространства $\overline{\mathcal{M}}_{0;5}$ нам требуется знать также количество содержащихся в нем пространств каждого типа. Это количество вычисляется из комбинаторных соображений, и в данном случае вычисление несложно:

- пространство первого типа одно;
- пространств второго типа 10 — это число способов выделить две пометки из пяти;
- пространств третьего типа 15 — пометку на средней неприводимой компоненте можно выбрать 5 способами, после чего разбить оставшиеся 4 пометки на две пары для крайних компонент можно 3 способами.

В результате мы получаем

$$\begin{aligned} P_{\overline{\mathcal{M}}_{0;5}} &= P_{\mathcal{M}_{0;5}} + 10P_{\mathcal{M}_{0;3}}P_{\mathcal{M}_{0;4}} + 15P^3_{\mathcal{M}_{0;3}} \\ &= (t^2-2)(t^2-3) + 10(t^2-2) + 15 = t^4 + 5t^2 + 1. \end{aligned}$$

С ростом числа отмеченных точек комбинаторика вычислений быстро усложняется, и мы приведем лишь еще один подсчет.

Пример 15.3.3. Пространство $\overline{\mathcal{M}}_{0;6}$ является несвязным объединением следующих пространств:

- пространства модулей гладких кривых $\mathcal{M}_{0;6}$;
- пространств модулей стабильных кривых с одной особой точкой; каждое такое пространство представляет собой либо прямое произведение пространств $\mathcal{M}_{0;3}\times\mathcal{M}_{0;5}$ (на одной неприводимой компоненте кривой имеется две отмеченные точки, на другой — четыре), либо прямое произведение пространств $\mathcal{M}_{0;4}\times\mathcal{M}_{0;4}$ (по три отмеченных точки на каждой компоненте);
- пространств модулей стабильных кривых с двумя особыми точками; каждое такое пространство представляет собой прямое произведение пространств $\mathcal{M}_{0;3}\times\mathcal{M}_{0;3}\times\mathcal{M}_{0;4}$, при этом на средней компоненте могут оказаться либо две, либо одна отмеченная точка;
- пространств модулей стабильных кривых с тремя особыми точками; каждое такое пространство представляет собой прямое произведение пространств $\mathcal{M}_{0;3}\times\mathcal{M}_{0;3}\times\mathcal{M}_{0;3}\times\mathcal{M}_{0;3}$, при этом дерево неприводимых компонент может быть либо цепочкой из четырех вершин, либо звездой с центром валентности 3.

Подсчитаем количество пространств каждого типа:

- пространство первого типа одно;
- количество пространств кривых с одной особой точкой и распределением отмеченных точек $2-4$ равно 15, а с распределением $3-3$ их число равно 10;
- количество пространств кривых с двумя особыми точками и двумя отмеченными точками на средней компоненте равно 45, а с одной отмеченной точкой на средней компоненте — 60;
- количество пространств кривых с тремя особыми точками, дерево неприводимых компонент для которых является цепочкой, равно 90, а тех, дерево неприводимых компонент которых — звезда — 15.

Таким образом,

$$\begin{aligned} P_{\overline{\mathcal{M}}_{0;6}} &= P_{\mathcal{M}_{0;5}} + 15P_{\mathcal{M}_{0;3}}P_{\mathcal{M}_{0;5}} + 10P^2_{\mathcal{M}_{0;4}} + (45+60)P^2_{\mathcal{M}_{0;3}}P_{\mathcal{M}_{0;4}} + (90+15)P^4_{\mathcal{M}_{0;3}} \\ &= (t^2-2)(t^2-3)(t^2-4) + 15(t^2-2)(t^2-3) + 10(t^2-2)^2 + 105(t^2-2) + 105 \\ &= t^6 + 16t^4 + 16t^2 + 1. \end{aligned}$$

Отметим, что, как и в предыдущем случае, мы получили многочлен с неотрицательными коэффициентами. При этом получившийся многочлен возвратный — последовательность его коэффициентов симметрична относительно середины, как и должно быть — по двойственности Пуанкаре — для любого компактного многообразия.

Оказывается, что продемонстрированные выше на примерах трудоемкие комбинаторные рассмотрения допускают кодирование в компактной и эффективной форме. А именно, введем две производящие функции для многочленов Пуанкаре пространств модулей гладких и стабильных рациональных кривых с отмеченными точками:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(x,t) &= x-\sum_{n=2}^{\infty}P_{\mathcal{M}_{n+1}}(t)\frac{x^n}{n!},\\ \overline{\mathcal{P}}(y,t) &= y+\sum_{n=2}^{\infty}P_{\overline{\mathcal{M}}_{n+1}}(t)\frac{y^n}{n!}.\end{aligned}$$

Теорема 15.3.4. *Производящие функции $\mathcal{P}(x,t)$ и $\overline{\mathcal{P}}(y,t)$ взаимно обратны относительно подстановки, т.е.*

$$\mathcal{P}(\overline{\mathcal{P}}(y,t))\equiv y;\qquad \overline{\mathcal{P}}(\mathcal{P}(x,t),t)\equiv x.$$

Поскольку многочлены Пуанкаре пространств модулей гладких кривых нам известны, мы получаем эффективный механизм для вычисления многочленов Пуанкаре компактифицированных пространств. Этот механизм не требует рассмотрения графов неприводимых компонент и легко реализуется в любой системе компьютерных алгебраических вычислений.

Эйлерова характеристика любого компактного многообразия есть результат подстановки значения $t=-1$ в его многочлен Пуанкаре. Аналогично тому как мы определяли мотивный многочлен Пуанкаре, мы можем определить *мотивную эйлерову характеристику.* Для разности двух компактных гладких алгебраических многообразий она определяется как разность соответствующих эйлеровых характеристик. Мотивная эйлерова характеристика некомпактного многообразия также равна результату подстановки $t=-1$ в его многочлен Пуанкаре. В частности, теорему 15.3.4 можно перенести на эйлеровы характеристики:

Следствие 15.3.5. *Экспоненциальные производящие функции $\mathcal{P}(x,-1)=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(n-1)}$ и $\overline{\mathcal{P}}(y,-1)$ для эйлеровых характеристик некомпактифицированных и компактифицированных пространств модулей взаимно обратны относительно подстановки.*

Поскольку эйлеровы характеристики некомпактифицированных пространств модулей известны, это утверждение позволяет быстро дополнить список уже вычисленных нами значений эйлеровых характеристик компактифицированных пространств:

n	3	4	5	6	7	8	9	10
$\chi(\overline{\mathcal{M}}_{0;n})$	2	7	34	213	1630	14747	153946	1821473

15.4 Компактифицированные пространства: когомологии по Килю

Знания чисел Бетти, т.е. коэффициентов многочлена Пуанкаре, как правило, недостаточно для понимания того, как устроены (ко)гомологии пространства. Для описания же более тонкой структуры кольца когомологий необходимо не только понимать, из каких кусочков состоит то или иное пространство, но и знать, как именно эти кусочки приклеены друг к другу.

Пример 15.4.1. Мы знаем, что пространство модулей $\overline{\mathcal{M}}_{0;5}$ склеено из $\mathcal{M}_{0;5}$, десяти копий прямого произведения $\mathcal{M}_{0;3}\times\mathcal{M}_{0;4}$, и пятнадцати копий прямого произведения $\mathcal{M}_{0;3}\times\mathcal{M}_{0;3}\times\mathcal{M}_{0;3}$. Чтобы понять, как все эти пространства склеены друг с другом, дадим явную конструкцию пространства $\overline{\mathcal{M}}_{0;5}$.

Рассмотрим прямое произведение $\overline{\mathcal{M}}_{0;4}\times\mathbb{CP}^1$. Зафиксируем на прямой $\mathbb{CP}^1$ координату, в которой координаты отмеченных точек x_1, x_2, x_3 равны, соответственно, $\infty, 0, 1$. Тогда эти три отмеченные точки определяют три попарно непересекающиеся структурных сечения $\sigma_i : \overline{\mathcal{M}}_{0;4}\to\overline{\mathcal{M}}_{0;4}\times\mathbb{CP}^1$, $i=1,2,3$. Четвертое сечение σ_4, отвечающее отмеченной точке x_4, пересекает каждое из трех первых сечений трансверсально в одной точке, см. рис..... Эти точки пересечения лежат над точками границы $\partial\overline{\mathcal{M}}_{0;4}$.

Для построения пространства модулей кривых $\overline{\mathcal{M}}_{0;5}$ достаточно раздуть на поверхности $\overline{\mathcal{M}}_{0;4}\times\mathbb{CP}^1$ каждую из трех точек пересечения сечения σ_4 с первыми тремя сечениями, см. рис. .... Тем самым, мы добавляем в прямое произведение двух проективных прямых $\overline{\mathcal{M}}_{0;4}\times\mathbb{CP}^1=\mathbb{CP}^1\times\mathbb{CP}^1$, имеющее многочлен Пуанкаре $(1+t^2)(1+t^2)=1+2t^2+t^4$, еще тройку двумерных циклов, получая многочлен Пуанкаре $P_{\overline{\mathcal{M}}_{0;5}}(t)=1+5t^2+t^4$, что согласуется с выполненным нами ранее вычислением. В результате мы получим реализацию пространства $\overline{\mathcal{M}}_{0;5}$ как универсальной кривой $\overline{\mathcal{C}}_{0;4}$ над пространством модулей $\overline{\mathcal{M}}_{0;5}$. Слои универсальной кривой над точками пространства гладких кривых $\mathcal{M}_{0;4}$ остаются рациональными кривыми с четырьмя отмеченными точками. Слой над каждой точкой границы представляет собой пару пересекающихся трансверсально рациональных кривых, на каждой из которых отмечено по две точки. При этом одна из кривых в паре является слоем в прямом произведении, а вторая вклеена при осуществлении раздутия.

В частности, пространство $\overline{\mathcal{M}}_{0;5}$ отождествляется таким образом с универсальной кривой $\overline{\mathcal{C}}_{0;4}$ над пространством модулей $\overline{\mathcal{M}}_{0;4}$. Это означает, что каждый слой проекции $\overline{\mathcal{M}}_{0;5}\to\overline{\mathcal{M}}_{0;4}$ является той самой кривой с четырьмя отмеченными точками, модулем которой является точка базы.

В полученном таким образом геометрическом представлении пространства $\overline{\mathcal{M}}_{0;5}$ оно оказывается разбито на предписанные ранее части. Действительно, оно состоит из

- пространства $\mathcal{M}_{0;5}$ — дополнения к четырем сечениям σ_i в $\mathcal{M}_{0;4}\times\mathbb{CP}^1$;
- 10 экземпляров пространства $\mathcal{M}_{0;3}\times\mathcal{M}_{0;4}$, представленных четырьмя сечениями σ_i и тремя проколотыми особыми слоями проекции разду-

той поверхности на множитель $\overline{\mathcal{M}}_{0;4}$, каждый из которых представляет собой объединение двух проколотых прямых;

- 15 точек попарного пересечения замыканий этих 10 проколотых прямых.

Упражнение 15.4.2. Опишите типичную стабильную рациональную кривую, отвечающую каждой из составляющих пространства $\overline{\mathcal{M}}_{0;5}$ в приведенном выше описании.

Упражнение 15.4.3. Поверхность $\overline{\mathcal{M}}_{0;5}$ является результатом раздутия трех точек в $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$. Верно ли, что любая тройка точек в прямом произведении двух проективных прямых переводится в любую другую тройку биголоморфным преобразованием?

С помощью обобщения этой конструкции, Килю [**?**] удалось найти простое описание колец когомологий пространств $\overline{\mathcal{M}}_{0;n}$.

Обозначим через $D = A \sqcup B$ неупорядоченное разбиение множества индексов отмеченных точек $\{1, 2, \dots, n\}$ на два непересекающихся подмножества A и B, в каждом из которых не менее двух элементов. (Разбиение $A \sqcup B$ совпадает с $B \sqcup A$.) Рассмотрим все стабильные рациональные кривые в $\overline{\mathcal{M}}_{0;n}$, состоящие из двух неприводимых компонент, одна из которых содержит все точки с индексами из набора A, а вторая — все точки с индексами из набора B. Такие стабильные кривые образуют подмногообразие (комплексной) коразмерности 1 в $\overline{\mathcal{M}}_{0;n}$. Его замыкание является гладким компактным комплексным подмногообразием коразмерности 1. Оно изоморфно прямому произведению многообразий $\overline{\mathcal{M}}_{0;|A|+1}$ и $\overline{\mathcal{M}}_{0;|B|+1}$ (точка пересечения двух неприводимых компонент общей кривой является дополнительной выделенной точкой на каждой из компонент). Обозначим через $[D]$ двойственный этому подмногообразию по Пуанкаре класс вторых когомологий, $[D] \in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{0;n})$.

Теорема 15.4.4. *Классы $[D]$ порождают кольцо когомологий $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{0;n})$.*

В частности, эти классы линейно порождают пространство вторых когомологий $H^2(\overline{\mathcal{M}}_{0;n})$, все кольцо когомологий порождено вторыми когомологиями и нечетные когомологии отсутствуют.

Образующие $[D]$ не являются линейно независимыми. Например, при $n = 4$ все три образующие, отвечающие разбиениям

$$\{1,2\} \sqcup \{3,4\}, \qquad \{1,3\} \sqcup \{2,4\}, \qquad \{1,4\} \sqcup \{2,3\},$$

представляют один и тот же класс когомологий, а именно, класс двойственный точке.

Более общим образом, зафиксируем любую четверку i, j, k, l попарно различных чисел между 1 и n. Обозначим через $[ij\mathcal{D}kl] \in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{0;n})$ сумму всех тех образующих D, в которых индексы i, j лежат в одной части, а k, l — в другой. Тогда образующие $[D]$ удовлетворяют системе линейных соотношений

$$R_{ijkl} : [ij\mathcal{D}kl] = [ik\mathcal{D}jl] = [il\mathcal{D}jk].$$

Эти соотношения легко выводятся из рассмотрения сквозного забывающего отображения $\overline{\mathcal{M}}_{0;n} \to \overline{\mathcal{M}}_{0;4}$, которое забывает все точки кроме x_i, x_j, x_k, x_l, и стягивает в точку все ставшие в результате нестабильными компоненты кривой.

Теорема 15.4.5. *Соотношения R_{ijkl} линейно порождают пространство линейных соотношений в $H^2(\overline{\mathcal{M}}_{0;n})$.*

Наконец, назовем два разбиения D, D' совместимыми, если множество индексов $\{1, 2, \ldots, n\}$ допускает такое разбиение на три попарно не пересекающихся подмножества A, B, C, что

$$D_1 = (A \sqcup B) \sqcup C, \qquad D_2 = A \sqcup (B \sqcup C).$$

Легко видеть, что если два разбиения D и D' не совместимы, то соответствующие циклы не пересекаются. Поэтому произведение образующих $[D]$ и $[D']$ в кольце когомологий равно 0.

Теорема 15.4.6. *Алгебра когомологий $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{0;n})$ порождена образующими $[D]$ по модулю аддитивных соотношений R_{ijkl} и мультипликативных соотношений $[D_1][D_2] = 0$ для любых несовместимых разбиений D_1 и D_2.*

Киль устанавливает также и изоморфизм кольца Чжоу многообразия $\overline{\mathcal{M}}_{0;n}$ (т.е. кольца пересечений классов рациональной эквивалентности подмногообразий в $\overline{\mathcal{M}}_{0;n}$) кольцу его когомологий, получая тем самым описание кольца Чжоу.

Доказательство теоремы 15.4.6. В конструкции Киля пространства модулей стабильных рациональных кривых строятся индуктивно. Предположим, что пространство $\overline{\mathcal{M}}_{0;n}$ уже построено. Тогда пространство $\overline{\mathcal{M}}_{0;n+1}$ строится как результат последовательности раздутий прямого произведения $\overline{\mathcal{M}}_{0;n} \times \overline{\mathcal{M}}_{0;4}$. При этом раздутия осуществляются вдоль гладких подмногообразий коразмерности 2.

Обозначим через p_1 проекцию прямого произведения $\overline{\mathcal{M}}_{0;n} \times \overline{\mathcal{M}}_{0;4}$ на первый сомножитель; через $\pi : \overline{\mathcal{M}}_{0;n+1} \to \overline{\mathcal{M}}_{0;n}$, как обычно, обозначено отображение забывания последней отмеченной точки. Тогда существует отображение $\pi_1 : \overline{\mathcal{M}}_{0;n+1} \to \overline{\mathcal{M}}_{0;n} \times \overline{\mathcal{M}}_{0;4}$, достраивающее коммутативный треугольник. К построению этого отображения как композиции последовательных раздутий мы сейчас и переходим.

$$\begin{array}{ccc}
\overline{\mathcal{M}}_{0;n+1} & \xrightarrow{\pi_1} & \overline{\mathcal{M}}_{0;n} \times \overline{\mathcal{M}}_{0;4} \\
\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle p_1} \\
\overline{\mathcal{M}}_{0;n} & = & \overline{\mathcal{M}}_{0;n}
\end{array}$$

Пусть $\sigma_1, \ldots, \sigma_n : \overline{\mathcal{M}}_{0;n} \to \overline{\mathcal{M}}_{0;n+1}$ — структурные сечения универсальной кривой. Их композиция с отображением π_1 задает отображения

$$\pi_1(\sigma_i) : \overline{\mathcal{M}}_{0;n} \to \overline{\mathcal{M}}_{0;n} \times \overline{\mathcal{M}}_{0;4}.$$

При каждом из этих отображений всякий дивизор $[D] \subset \overline{\mathcal{M}}_{0;n}$ переходит в гладкое подмногообразие коразмерности 2 в $\overline{\mathcal{M}}_{0;n} \times \overline{\mathcal{M}}_{0;4}$. Будем обозначать эти подмногообразия $\langle D\rangle$. Обозначим через $\langle D_k\rangle$ объединение всех подмногообразий $\langle D\rangle$, отвечающих упорядоченным разбиениям $D = A \sqcup B$, часть B которых состоит из k элементов, $k = 2, 3, \dots, n-2$. Положим $X_1 = \overline{\mathcal{M}}_{0;n} \times \overline{\mathcal{M}}_{0;4}$ и, осуществив последовательные раздутия многообразия X_1 вдоль $\langle D_2\rangle, \langle D_3\rangle, \dots, \langle D_{n-2}\rangle$, получим $X_{n-2} = \overline{\mathcal{M}}_{0;n+1}$.

Говоря более детально, многообразие X_2 является результатом раздутия X_1 вдоль $\langle D_2\rangle$. Обратим внимание, на то, что $\langle D_2\rangle$ является несвязным объединением попарно изоморфных подмногообразий, занумерованных парами различных индексов из $\{1, \dots, n\}$. Пусть $f_1 : X_2 \to X_1$ — это раздутие. Каждый прямой прообраз $f_1^{-1}(\langle D_k\rangle)$, $k \geq 3$, представляет собой объединение попарно изоморфных неприводимых гладких компонент. При этом неприводимые компоненты в $f_1^{-1}(\langle D_3\rangle)$ попарно не пересекаются. Действительно, пересечение двух неприводимых компонент многообразия $\langle D_3\rangle$ является непустым в случае, если части B разбиений, отвечающих этим компонентам, отличаются одним элементам. После раздутия вдоль $\langle D_2\rangle$ прямые прообразы этих компонент уже не пересекаются. Точно также последующие раздутия происходят вдоль подмногообразий, представляющих собой несвязное объединение гладких попарно изоморфных компонент. □

Упражнение 15.4.7. Пользуясь теоремой Киля, дайте полное описание колец когомологий $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{0;5})$, $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{0;6})$.

Упражнение 15.4.8. Верно ли, что классы когомологий, двойственные любым 5 граничным стратам коразмерности 1 в $\overline{\mathcal{M}}_{0;5}$ линейно независимы, т.е. образуют базис в $H^2(\overline{\mathcal{M}}_{0;5})$?

15.5 Компактифицированные пространства: когомологии по Концевичу–Манину

При больших значениях параметра n описание по Килю пространств когомологий $H^k(\overline{\mathcal{M}}_{0;n})$ становится трудоемким из-за большого количества образующих и соотношений. Концевич и Манин предложили описание этих пространств в терминах модулярных деревьев.

Сопоставим стабильной рациональной кривой с n отмеченными точками ее модулярное дерево, в вершинах которого расставлены пометки из множества $\{1, \dots, n\}$ — номера отмеченных точек, лежащих на соответствующей компоненте. Одна вершина может нести на себе несколько пометок. Каждому модулярному дереву T можно сопоставить подмногообразие в $\overline{\mathcal{M}}_{0;n}$ — замыкание множества всех кривых с модулярным деревом T — и двойственный этому подмногообразию класс когомологий $[T] \in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{0;n})$. Мы будем называть это подмногообразие ***модулярным стратом***. Например, дереву, состоящему из одной вершины, отвечает все многообразие $\overline{\mathcal{M}}_{0;n}$ и единичный класс когомологий в $H^0(\overline{\mathcal{M}}_{0;n})$. Размерность класса когомологий $[T]$, отвечающего модулярному дереву T, равна удвоенному количеству ребер в этом дереве, т.е. количеству особых точек в кривой с таким модулярным деревом.

Упражнение 15.5.1. Нарисуйте все помеченные модулярные деревья с двумя ребрами для $n = 6$.

Теорема 15.5.2. *Классы $[T]$, отвечающие деревьям с k ребрами, линейно порождают пространство $H^{2k}(\overline{\mathcal{M}}_{0;n})$.*

Эти классы не независимы и подчиняются линейным соотношениям, которые строятся следующим образом. Фиксируем дерево T, четверку пометок i, j, k, l вершин этого дерева и вершину v, разделяющую эти пометки. Последнее требование означает, что все четыре кратчайших пути, соединяющих v с каждой из вершин, помеченных индексами i, j, k и l, начинаются с различных ребер.

На модулярных деревьях определено понятие стягивания ребра $T' \to T$ — операции, при которой число ребер и число вершин в дереве уменьшается на 1. Будем говорить, что стягивание $T' \to T$ ***отделяет*** пометки i, j от пометок k, l, если вершина v дерева T есть результат стягивания в дереве T' ребра, кратчайшие пути из одного конца которого в вершины с пометками i, j, а из другого конца которого в вершины с пометками k, l не содержат само это ребро.

Лемма 15.5.3. *Классы когомологий, отвечающие модулярным деревьям, удовлетворяют линейным соотношениям*

$$\sum_{ijT'kl} [T'] = \sum_{ikT''jl} [T''],$$

где суммирование слева идет по всем стягиваниям $T' \to T$, отделяющим пометки i, j от пометок k, l, по всем стягиваниям $T'' \to T$, отделяющим пометки i, k от пометок j, l.

Доказательство леммы. Рассмотрим результат стягивания в дереве T всех ребер, не содержащих меток i, j, k, l. В результате мы получим отображение соответствующего страта в $\overline{\mathcal{M}}_{0;4}$, причем левая и правая части равенства будут соответствовать двум различным точкам границы в $\overline{\mathcal{M}}_{0;4}$. Прообразы этих двух точек в $\overline{\mathcal{M}}_{0;n}$ представляют один и тот же класс вторых когомологий, и дают один и тот же класс когомологий в $H^{2(k+1)}(\overline{\mathcal{M}}_{0;n})$ в пересечении с классом $[T] \in H^{2k)}(\overline{\mathcal{M}}_{0;n})$. □

Теорема 15.5.4. *Описанные в лемме линейные соотношения порождают все пространство линейных соотношений между классами $[T]$.*

Упражнение 15.5.5. Выпишите все линейные соотношения между классами модулярных стратов в а) $H^2(\overline{\mathcal{M}}_{0;6})$, б) $H^4(\overline{\mathcal{M}}_{0;6})$, в) $H^4(\overline{\mathcal{M}}_{0;7})$ и найдите размерности соответствующих пространств прямым вычислением.

15.6 Перечисление рациональных кривых на плоскости по Концевичу

Через две точки на плоскости можно провести одну прямую. Через пять точек на плоскости проходит единственная кривая второго порядка (квадрика). Прямая и квадрика — рациональные кривые, степени 1 и 2 соответственно.

Количество параметров, задающих рациональную кривую степени d, равно $3d-1$. Действительно, для того, чтобы задать параметризованную рациональную кривую $\mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^2$, $(u:v) \mapsto (x:y:z)$, необходимо $3d+2$ параметров — по $d+1$ параметров на каждую из координат x, y и z, определенных с точностью до общего множителя. Группа замены параметров u, v в прямой-прообразе трехмерна, поэтому пространство непараметризованных рациональных прямых на плоскости имеет размерность $3d-1$. Это означает, что через $3d-1$ точек на плоскости в общем положении должно проходить конечное число рациональных кривых степени d. Отметим, что при $d \geq 2$ все эти рациональные кривые будут особыми: гладкая кривая степени d должна иметь род $\frac{(d-1)(d-2)}{2} > 0$ при $d > 2$.

В этом параграфе мы дадим ответ на вопрос, чему равно число N_d рациональных кривых степени d, проходящих через $3d-1$ точек в общем положении на плоскости.

Теорема 15.6.1 ([?]). *Число N_d рациональных кривых степени d, проходящих через $3d-1$ точек в общем положении на плоскости задается рекуррентным соотношением*

$$N_d = \sum_{0<e<d} N_e N_{d-e} e^2 (d-e) \left(\binom{3d-4}{3e-2}(d-e) - \binom{3d-4}{3e-1} e \right).$$

Это рекуррентное соотношение позволяет вычислить все значения N_d по начальному значению $N_1 = 1$. Вот как вычисляются первые члены этой последовательности:

$$\begin{aligned} N_2 &= N_1 N_1 \cdot (2-1) = 1 \\ N_3 &= N_1 N_2 \cdot 2 \cdot (2 \cdot 5 - 10) + N_2 N_1 \cdot 4(5-2) = 12 \\ N_4 &= 12 \cdot (72-84) + 16 \cdot (70-56) + 12 \cdot (72-27)) = 620. \end{aligned}$$

Начало последовательности выглядит так:

$$1, 1, 12, 620, 87304, 26312976, \ldots$$

Это означает, что через 8 точек на плоскости в общем положении проходит 12 кубических рациональных кривых, через 11 точек в общем положении проходит 620 рациональных кривых четвертой степени и т.д.