

Многообразия Фробениуса-Дубровина

С.М Натанзон

CONTENTS

1. Фробениусовы пары	2
2. Структуры Дубровина: определение и два примера	5
3. Фробениусовы структуры	9
4. Уравнения Дарбу-Егорова	12
5. Эйлерово поле	15
6. Потенциал	18
7. Уравнения $WDVV$	21
8. Простейшие решения уравнений $WDVV$	25
9. Аналитические и алгебраические решения $WDVV$	29
10. Когомологическая теория поля	32
11. Инварианты Громова-Виттена	34
12. Связка плоских кометрик	36
References	39

1. ФРОБЕНИУСОВЫ ПАРЫ

Определение 1.1. Фробениусовой парой назовем пару (A, g) , где:

1) A – коммутативная ассоциативная конечномерная алгебра с единицей $e \in A$ над полем \mathbb{K} .

2) $g : A \times A \rightarrow \mathbb{K}$ – симметрическая невырожденная билинейная форма такая, что $g(a, b \cdot c) = g(a \cdot b, c)$.

Эта билинейная форма порождает линейную форму $\theta(a) = g(a, e)$.

Задача 1.1. Пусть A – коммутативная ассоциативная алгебра с единицей и $\theta \in A^*$ – линейная форма. Тогда билинейная форма $g(a, b) = \theta(a \cdot b)$ невырождена, если и только если $\text{Ker}(\theta)$ не содержит идеалов A . В этом случае (A, g) образует фробениусову пару.

Таким образом, можно считать, что фробениусова пара – это пара (A, θ) , где A – коммутативная ассоциативная конечномерная алгебра с единицей и $\theta : A \rightarrow K$ – линейная форма такая, что $\text{Ker}(\theta)$ не содержит идеалов A .

Если существует фробениусова пара вида (A, θ) , то алгебра A является фробениусовой, то есть ее правые и левые регулярные представления эквивалентны [11].

Пример 1.1. (Фробениус). Пусть G – конечная абелева группа. Рассмотрим ее групповую алгебру

$$A = \mathbb{K}[G] = \{a = \sum_i \alpha_i g_i \mid \alpha_i \in \mathbb{K}, g_i \in G\}.$$

Положим $\theta(\sum_i \alpha_i g_i) = \alpha_0$, где g_0 – единица группы G .

Пример 1.2. Пусть Ω – конечное множество и μ – мера на Ω . Рассмотрим множество

$$A = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}\}$$

всех функций на Ω . Положим $\theta(f) = \int_{\Omega} f d\mu$.

Пример 1.3. Пусть X – гладкое компактное многообразие и $\dim X = 2n$. Рассмотрим четные когомологи де Рама $A = H^{ev}(X, \mathbb{C})$ с операцией $a \cdot b = a \wedge b$. Для $a = \sum_i a_i$, где $a_i \in H^{2i}(X, \mathbb{C})$, положим $\theta(a) = \int_X a_n$.

Пример 1.4. Рассмотрим пространство $A = \mathbb{K}^n$ с операцией

$$(a_1, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots, b_n) = (a_1 b_1, \dots, a_n b_n)$$

(т.е. A – алгебра диагональных матриц). Рассмотрим множество $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $\lambda_i \neq 0$ ($i = 1, \dots, n$), и положим

$$\theta(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i.$$

Задача 1.2. Доказать, что пары (A, θ) из примеров 1.1-1.4 являются фробениусовыми парами.

Пусть (A, θ) – фробениусова пара и A^* – двойственное пространство. Тогда

$$\theta \in A^*, g \in A^* \otimes A^* = \text{Hom}(A, A^*) \text{ и } g^{-1} \in \text{Hom}(A^*, A).$$

Рассмотрим трилинейную форму

$$c \in A^* \otimes A^* \otimes A^* = \text{Hom}(A \otimes A, A^*),$$

где

$$c(a, b, d) = c(a \otimes b \otimes d) = \theta(a \cdot b \cdot d).$$

Тогда

$$g^{-1}c \in \text{Hom}(A \otimes A, A).$$

Лемма 1.1. $a \cdot b = g^{-1}c(a \otimes b)$.

Proof. Для $a \in A, \ell \in A^*$ положим $\langle a, \ell \rangle = \ell(a)$. Тогда для каждого $x^* \in A^*$

$$\begin{aligned} \langle a \cdot b, x^* \rangle &= g(a \cdot b, g^{-1}(x^*)) = \theta(a \cdot b \cdot g^{-1}(x^*)) = c(a \otimes b \otimes g^{-1}(x^*)) = \\ &= \langle c(a \otimes b), g^{-1}(x^*) \rangle = \langle g^{-1}c(a \otimes b), x^* \rangle. \end{aligned}$$

Следовательно, $a \cdot b = g^{-1}c(a \otimes b)$. □

Таким образом, фробениусова пара — это конечномерное векторное пространство с заданными на нем линейной, билинейной и трилинейной формами со специальными свойствами. Это соображение вместе с топологическими аргументами позволяет доказать [3], что категория фробениусовых пар изоморфна категории $2D$ топологических теорий поля в смысле [2]. Более общим $2D$ топологическим теориям поля отвечают уже некоммутативные фробениусовы пары [1].

Далее мы считаем, что $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Для каждого $a \in A$ рассмотрим $\ell_a \in \text{Hom}(A, A)$, где $\ell_a(x) = a \cdot x$.

Лемма 1.2. Пусть A — ассоциативная коммутативная алгебра с единицей. Тогда соответствие $a \mapsto \ell_a$ порождает точное представление алгебры.

Proof.

$$\ell_{\lambda a + \mu b}(x) = (\lambda a + \mu b)x = (\lambda \ell_a + \mu \ell_b)(x) \cdot \ell_{ab}(x) = abx = (\ell_a \cdot \ell_b)(x).$$

Пусть $\ell_a(A) = 0$, тогда $a = \ell_a e = 0$. □

Определение 1.2. Элемент $a \in A$ называется полупростым, если оператор $\ell_a \in \text{Hom}(A, A)$ диагонализуем. Алгебра называется полупростой, если все ее элементы полупросты. Фробениусова пара (A, θ) называется полупростой, если A полупроста.

Задача 1.3. Доказать, что алгебра A полупроста, если и только если $a^m \neq 0$ для всех $a \in A, a \neq 0, m > 0$.

Задача 1.4. Доказать, что алгебры из примеров 1.1, 1.2, 1.4 полупросты, а из примера 1.3 нет.

Лемма 1.3. Пусть A — коммутативная ассоциативная полупростая конечномерная алгебра. Тогда существует $a \in A$ такой, что каждое собственное подпространство оператора ℓ_a одномерно и инвариантно относительно оператора ℓ_b для всех $b \in A$.

Proof. Выберем $a \in A$ так, чтобы оператор ℓ_a имел максимальное число m различных собственных значений. Пусть μ_1, \dots, μ_m — собственные значения оператора ℓ_a и A_i — собственные подпространства, отвечающие μ_i . Рассмотрим $b \in A, h \in A_i$ и $f = \ell_b h$. Тогда $\ell_a f = \ell_a \ell_b h = \ell_b \ell_a h = \mu_i \ell_b h = \mu_i f$ и, следовательно, $\ell_b A_i \subset A_i$.

Оператор $\ell_{a+\lambda b}$ имеет не более m собственных значений, причем при малых λ эти собственные значения лежат вблизи $\{\mu_1, \dots, \mu_m\}$ и, следовательно, попарно различны. Таким образом ограничения операторов $\ell_{a+\lambda b}$ на A_i имеют лишь 1 собственное значение. Следовательно, оператор ℓ_b также имеет лишь одно собственное значение на A_i . Таким образом, $\ell_b(c) = \varepsilon_i^b c$ для всех $c \in A_i$. Числа, $\varepsilon_1^b, \dots, \varepsilon_m^b$ определяют оператор ℓ_b и, в частности, $\dim\{\ell_b \mid b \in A\} \leq m$.

С другой стороны, согласно лемме 1.2, $\dim A = \dim\{\ell_b \mid b \in A\}$, откуда $\sum_{i=1}^m \dim A_i = \dim A = \dim\{\ell_b \mid b \in A\} \leq m$ и следовательно $\dim A_i = 1$ для всех i . \square

Определение 1.3. Пусть (A, θ_A) и (B, θ_B) — две фробениусовы пары. Изоморфизм $\varphi : A \rightarrow B$ называется изоморфизмом фробениусовых пар, если $\theta_B(\varphi(a)) = \theta_A(a)$ при $a \in A$.

Теорема 1.1. Каждая полупростая фробениусова пара изоморфна паре из примера 1.4, то есть (\mathbb{K}^n, θ) .

Proof. Пусть (A, θ_A) — полупростая фробениусова пара. Согласно лемме 1.3 она имеет базис f_1, \dots, f_n такой, что $b \cdot f_i = \ell_b f_i = \varepsilon_i^b f_i$ для каждого $b \in A$. Это дает гомоморфизм

$$\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad \text{где } \varphi(b) = (\varepsilon_1^b, \dots, \varepsilon_n^b).$$

Согласно лемме 1.2 φ — мономорфизм и, следовательно, изоморфизм, поскольку $\dim A = n$. Положим $\theta(x) = \theta_A(\varphi^{-1}(x))$ для $x \in \mathbb{C}^n$. Тогда $\text{Ker } \theta = \varphi(\text{Ker } \theta_A)$ не содержит идеалов алгебры \mathbb{C}^n . Следовательно,

$$\theta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon_i,$$

где $\lambda_i \neq 0$ для всех i . Таким образом, φ порождает изоморфизм пар (A, θ_A) и (\mathbb{C}^n, θ) . \square

Определение 1.4. Базис $X_1, \dots, X_n \in A$ полупростой фробениусовой алгебры A называется каноническим, если $X_i \cdot X_i = X_i$ и $X_i \cdot X_j = 0$ при $i \neq j$.

Задача 1.5. Пусть X_1, \dots, X_n — канонический базис полупростой фробениусовой алгебры A и (A, θ) — фробениусова пара. Пусть $\mu_i = \theta(X_i)$ и $\eta^1, \dots, \eta^n \in A^*$ — двойственный базис ($\eta^i(X_j) = \delta_j^i$). Тогда $e = \sum_{i=1}^n X_i$, $\theta = \sum_{i=1}^n \mu_i \eta^i$, $g = \sum_{i=1}^n \mu_i \eta^i \otimes \eta^i$, $c = \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot \eta^i \otimes \eta^i \otimes \eta^i$.

Теорема 1.2. У каждой полупростой фробениусовой алгебры A есть канонический базис. Этот базис единствен с точностью до перестановки.

Proof. Согласно теореме 1.1 можно считать, что $A = \mathbb{K}^n$, где (\mathbb{K}^n, θ) — пара из примера 1.4. Алгебра \mathbb{K}^n имеет канонический базис $x_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. Пусть y_1, \dots, y_n — другой канонический базис алгебры \mathbb{K}^n . Тогда $x_i = \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij} y_j$ и $y_k = \sum_{j=1}^n \xi_{kj} x_j$. Таким образом,

$$\xi_{ki} x_i = \left(\sum_{j=1}^n \xi_{kj} x_j \right) x_i = y_k x_i = y_k \left(\sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij} y_j \right) = \varepsilon_{ik} y_k.$$

Следовательно, если $\varepsilon_{ik} \neq 0$ и $\omega_{ki} = \frac{\xi_{ki}}{\varepsilon_{ik}}$, то $y_k = \omega_{ki}x_i = \omega_{ki}x_i^2 = \omega_{ki}^{-1}(\omega_{ki}x_i)^2 = \omega_{ki}^{-1}y_k^2 = \omega_{ki}^{-1}y_k = x_i$. \square

2. СТРУКТУРЫ ДУБРОВИНА: ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ДВА ПРИМЕРА

Определение 2.1. Пусть M — гладкое вещественное или комплексное многообразие. Структурой Дубровина на M называется структура полупростой фробениусовой пары (M_p, θ_p) на касательном пространстве $M_p = T_pM$ каждой точки $p \in M$ такая, что

- 1) Тензоры $\theta = \{\theta_p | p \in M\}$, $g(a, b) = \theta(a \cdot b)$, $c(a, b, d) = \theta(a \cdot b \cdot d)$ гладкие и $d\theta = 0$.
- 2) Метрика g порождает плоскую связность ∇ такую, что $\nabla e = 0$, где e — поле единицы.
- 3) Существует покрытие $M \cup_{\alpha} U_{\alpha}$ координатными картами

$$(x_{\alpha}^1, \dots, x_{\alpha}^n) : U_{\alpha} \rightarrow \mathbb{K}^n$$

такое, что $(\partial/\partial x_{\alpha}^1, \dots, \partial/\partial x_{\alpha}^n)$ образуют канонический базис M_p при каждом $p \in U$, поле $E = \sum_{i=1}^n x_{\alpha}^i (\partial/\partial x_{\alpha}^i)$ не зависит от α и $L_E \theta = (m+1)\theta$, где L_E — производная Ли по полю E .

Пример 2.1. Пусть $M = \mathbb{R}^n = \{(x^1, \dots, x^n) | x^i \in \mathbb{R}\}$. Координаты (x^1, \dots, x^n) порождают дифференциальные формы dx^i и векторные поля $\partial/\partial x^i$. Зададим на M_p структуру алгебры, положив

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} = \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Тогда $e = \sum_{i=1}^n (\partial/\partial x^i)$, $\theta = \sum_{i=1}^n dx^i$, $g = \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i$, $c = \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i \otimes dx^i$ и $L_E \theta = \theta$. Таким образом, эта структура является структурой Дубровина.

Пример 2.2. Пусть $\widetilde{M} = \widetilde{M}^n$ — пространство всех многочленов вида

$$p(z) = z^{n+1} + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n, \quad a_i \in \mathbb{C}.$$

(Это пространство известно в теории особенностей как пространство версальных деформаций особенности A_n .)

Пусть $p = p(z) \in \widetilde{M}$, $v \in \widetilde{M}_p$ и $p_v(z, s) = z^{n+1} + a_1(s)z^{n-1} + \dots + a_n(s)$ — кривая в множестве \widetilde{M} , отвечающая касательному вектору v и такая, что $p_v(z, 0) = p(z)$. Положим

$$\dot{a}_i = \frac{da_i(s)}{ds} \Big|_{s=0} \quad \text{и} \quad \dot{p}_v(z) = \frac{\partial p_v(z, s)}{\partial s} \Big|_{s=0} = \dot{a}_1 z^{n-1} + \dots + \dot{a}_n.$$

Соответствие $v \mapsto \dot{p}_v$ порождает изоморфизм

$$\varphi_p : \widetilde{M}_p \rightarrow Q_{n-1} = \{b_1 z^{n-1} + \dots + b_n \mid b_i \in \mathbb{C}\}$$

на пространство Q_{n-1} многочленов степени $n-1$.

Рассмотрим также многочлен $p'(z) = (n+1)z^n + \dots + a_{n-1}$. Рассмотрим операцию $*_p : \widetilde{M}_p \times \widetilde{M}_p \rightarrow \widetilde{M}_p$, где

$$v_1 *_p v_2 = \varphi_p^{-1}(\varphi_p(v_1) \cdot \varphi_p(v_2) \pmod{p'}).$$

Она однозначно определяется равенством

$$\varphi_p(v_1 *_p v_2) = \varphi_p(v_1) \cdot \varphi_p(v_2) - fp',$$

где f — единственный многочлен такой, что $\varphi_p(v_1) \cdot \varphi_p(v_2) - f \cdot p' \in Q_{n-1}$.
Положим также

$$\theta_p(v) = - \operatorname{Res}_{z=\infty} \frac{\varphi_p(v)}{p'(z)} dz, \quad \theta = \{\theta_p | p \in \widetilde{M}\} \text{ и } g(a, b) = \theta(a \cdot b).$$

Задача 2.1. Умножение $*_p$ и линейная форма θ_p порождают на \widetilde{M}_p структуру фробениусовой пары с единицей $e = \varphi^{-1}(1)$. Алгебра \widetilde{M}_p полупроста, если и только если корни многочлена $p'(z)$ попарно различны.

Пусть $M = M^n \subset \widetilde{M}^n$ — подмножество таких $p \in \widetilde{M}^n$, что корни $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ многочлена $p'(z)$ попарно различны. Для $p \in M$ положим $x^i = x^i(p) = p(\alpha_i)$. Функции x^i образуют координаты в окрестности $U \subset M$ точки p . Далее в этом параграфе мы считаем, что $p \in U \subset M$.

Лемма 2.1. Векторы $(\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n)$ образуют канонический базис в M_p ,

$$\frac{\partial p}{\partial x^j} = \prod_{i \neq j} \frac{(z - \alpha_i)}{(\alpha_j - \alpha_i)},$$

и

$$\theta = \frac{da_1}{n+1} = \sum_{i=1}^n \mu_j dx^j,$$

где

$$\mu_j = \frac{1}{n+1} \prod_{i \neq j} \frac{1}{\alpha_j - \alpha_i} = \frac{1}{n+1} \frac{\partial a_1}{\partial x^j}.$$

Proof.

$$\delta_{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \frac{\partial p(\alpha_i)}{\partial x^j} = \frac{\partial((\alpha_i)^{n+1} + a_1(\alpha_i)^{n-1} + \dots + a_n)}{\partial x^j} =$$

$$((n+1)(\alpha_i)^n + (n-1)a_1(\alpha_i)^{n-2} + \dots + a_{n-1}) \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} + \frac{\partial a_1}{\partial x^j} (\alpha_i)^{n-1} + \dots + \frac{\partial a_n}{\partial x^j} =$$

$$p'(\alpha_i) \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} + \frac{\partial p}{\partial x^j}(\alpha_i) = \frac{\partial p}{\partial x^j}(\alpha_i).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial p}{\partial x^j}(\alpha_i) = \delta_{ij}$$

и

$$\frac{\partial p}{\partial x^j} = \prod_{i \neq j} \frac{(z - \alpha_i)}{(\alpha_j - \alpha_i)} = \left(\prod_{i \neq j} \frac{1}{\alpha_j - \alpha_i} \right) z^{n-1} + A_1 z^{n-2} + \dots + A_{n-1}.$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial p}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} (z^{n+1} + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n) = \frac{\partial a_1}{\partial x^j} z^{n-1} + \dots + \frac{\partial a_n}{\partial x^j}.$$

Таким образом,

$$\prod_{i \neq j} \frac{1}{\alpha_j - \alpha_i} = \frac{\partial a_1}{\partial x^j}.$$

По определению $\varphi_p(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\partial p}{\partial x^i}$ и, следовательно, векторы $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ образуют канонический базис алгебры M_p , если и только если

$$\frac{\partial p}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial p}{\partial x^k} = \delta_{jk} \frac{\partial p}{\partial x^j} - fp',$$

где f — некоторый многочлен.

Пусть $j \neq k$. Тогда

$$\frac{\partial p}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial p}{\partial x^k} = \prod_{i \neq j} \frac{(z - \alpha_i)}{(\alpha_j - \alpha_i)} \prod_{i \neq k} \frac{(z - \alpha_i)}{(\alpha_k - \alpha_i)} = \prod_{i=1}^n (z - \alpha_i) \cdot \tilde{f} = p'f,$$

где f — многочлен. Кроме того,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x^j} - 1\right)(\alpha_j) = \prod_{i \neq j} \frac{\alpha_j - \alpha_i}{\alpha_j - \alpha_i} - 1 = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial p}{\partial x^j} - 1 = (z - \alpha_j) \cdot \psi$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial p}{\partial x^j} - \frac{\partial p}{\partial x^j} &= \frac{\partial p}{\partial x^j} \left(\frac{\partial p}{\partial x^j} - 1\right) = \prod_{i \neq j} \frac{(z - \alpha_i)}{(\alpha_j - \alpha_i)} (z - \alpha_j) \psi = \\ &= \prod_{i=1}^n (z - \alpha_i) \cdot \tilde{f} = p' \cdot f, \end{aligned}$$

где f и ψ — многочлены. Таким образом,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$$

образуют канонический базис в M_p .

Определим μ_i равенством $\theta = \sum_{i=1}^n \mu_j dx^j$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu_j &= \theta\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = -\text{Res}_{z=\infty} \frac{\partial p / \partial x^j}{p'} dz = \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=\alpha_k} \frac{\partial p / \partial x^j}{p'} dz = \\ &= \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=\alpha_k} \frac{\prod_{i \neq j} \frac{z - \alpha_i}{\alpha_j - \alpha_i} dz}{(n+1) \prod_{i=1}^n (z - \alpha_i)} = \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=\alpha_k} \frac{dz}{(n+1)(z - \alpha_j) \prod_{i \neq j} (\alpha_j - \alpha_i)} = \\ &= \frac{1}{(n+1) \prod_{i \neq j} (\alpha_j - \alpha_i)} = \frac{1}{n+1} \frac{\partial a_1}{\partial x^j}. \end{aligned}$$

□

Лемма 2.2. Пусть $E = \sum_{i=1}^n x^i (\partial / \partial x^i)$. Тогда $L_E \theta = \frac{2}{n+1} \theta$.

Proof. Многочлены $L_E p$ и $p - \frac{z}{n+1} p'$ имеют одинаковые степени $n-1$ и совпадают в точках $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, поскольку согласно лемме 2.1

$$\begin{aligned} L_E(p)(\alpha_k) &= \sum_{j=1}^n x^j \frac{\partial p}{\partial x^j}(\alpha_k) = \sum_{j=1}^n x^j \prod_{i \neq j} \frac{z - \alpha_i}{\alpha_j - \alpha_i}(\alpha_k) = \\ &= \sum_{j=1}^n x^j \prod_{i \neq j} \frac{\alpha_k - \alpha_i}{\alpha_j - \alpha_i} = x^k = p(\alpha_k) = p(\alpha_k) - \frac{z}{n+1} p'(\alpha_k). \end{aligned}$$

Таким образом, $L_E(p) = p - \frac{z}{n+1}p'$.

Коэффициенты a_1, \dots, a_n можно считать координатами многочлена $p(z) = z^{n+1} + \sum_{k=1}^n a_k z^{n-k}$ на множестве M . Рассмотрим векторное поле

$$F = \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{n+1} a_k \frac{\partial}{\partial a_k}$$

на M . Тогда

$$\begin{aligned} L_F(p)(z) &= \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{n+1} a_k z^{n-k} = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{n-k}{n+1}\right) a_k z^{n-k} = \\ &= p(z) - \frac{z}{n+1} p'(z) = L_E(p)(z). \end{aligned}$$

Кроме того, согласно лемме 2.1,

$$\begin{aligned} L_E\theta &= \frac{1}{n+1} L_E da_1 = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{n+1} L_{(a_k \frac{\partial}{\partial a_k})} da_1 = \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{2}{n+1} da_1 = \frac{2}{n+1} \theta. \end{aligned}$$

□

Докажем теперь, что наша метрика плоская. Для этого мы построим плоские координаты следующим образом. Рассмотрим функцию $\omega = \omega(p, z)$ на $M \times \mathbb{C}$ такую, что $\omega^{n+1} = p(z)$ и $z = \omega + \frac{t^1}{\omega} + \frac{t^2}{\omega^2} + \dots$. Равенство

$$\omega^{n+1} = p\left(\omega + \frac{t^1}{\omega} + \frac{t^2}{\omega^2} + \dots\right)$$

позволяет найти t^i как полиномы от a_i . В частности, $t^1 = -a_1/(n+1)$, $t^2 = -a_2/(n+1)$

Лемма 2.3. *Функции t^1, \dots, t^n образуют координаты на U и*

$$g\left(\frac{\partial}{\partial t^i}, \frac{\partial}{\partial t^j}\right) = (n+1)\delta_{i+j, n+1}.$$

Proof. Рассмотрим множество многочленов $p(z, t) = z^{n+1} + a_1(t)z^{n-1} + \dots + a_n(t)$, зависящих от наших координат $t = (t^1, \dots, t^n)$. Рассмотрим функцию

$$z(\omega, t) = \omega + \frac{t^1}{\omega} + \frac{t^2}{\omega^2} + \dots$$

такую, что $\omega^{n+1} = p(z(\omega, t), t)$. Будем считать, что ω и t^i — независимые переменные. Тогда

$$0 = \frac{d\omega^{n+1}}{dt^i} = \frac{\partial p}{\partial t^i} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t^i} = \frac{\partial p}{\partial t^i} + p' \frac{1}{\omega^i}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial p}{\partial t^i} = -\frac{p'}{\omega^i}$$

и

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\partial}{\partial t^i}, \frac{\partial}{\partial t^j}\right) &= \theta\left(\frac{\partial}{\partial t^i} \cdot \frac{\partial}{\partial t^j}\right) = -\text{Res}_{z=\infty} \frac{\frac{\partial p}{\partial t^i} \cdot \frac{\partial p}{\partial t^j}}{p'} dz = \\ &= -\text{Res}_{z=\infty} \frac{p' dz}{\omega^{i+j}} = -\text{Res}_{\omega=\infty} \frac{dp}{\omega^{i+j}} = -\text{Res}_{\omega=\infty} \frac{d\omega^{n+1}}{\omega^{i+j}} = (n+1)\delta_{i+j, n+1}. \end{aligned}$$

□

Лемма 2.4. В координатах $(t^1, \dots, t^n) : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ поле единиц имеет вид $e = -(n+1)\frac{\partial}{\partial t^n}$ и $\nabla e = 0$, где ∇ — связность, порожденная метрикой g .

Proof. Напомним, что $t^1 = -a_1/(n+1)$. Пусть поле единиц имеет вид $e = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t^{\alpha}}$. Тогда согласно леммам 2.1 и 2.3

$$\begin{aligned} \delta_{\beta,1} &= dt^1\left(\frac{\partial}{\partial t^{\beta}}\right) = \frac{-1}{n+1} da_1\left(\frac{\partial}{\partial t^{\beta}}\right) = -\theta\left(\frac{\partial}{\partial t^{\beta}}\right) = -g\left(e, \frac{\partial}{\partial t^{\beta}}\right) = \\ &= -g\left(\sum_{\alpha=1}^n \rho_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t^{\alpha}}, \frac{\partial}{\partial t^{\beta}}\right) = -\sum_{\alpha=1}^n \rho_{\alpha} g\left(\frac{\partial}{\partial t^{\alpha}}, \frac{\partial}{\partial t^{\beta}}\right) = \\ &= -(n+1) \sum_{\alpha=1}^n \rho_{\alpha} \delta_{\alpha+\beta, n+1} = -(n+1) \rho_{n+1-\beta} \end{aligned}$$

Следовательно, $\rho_{n+1-\beta} = -\frac{1}{n+1} \delta_{\beta,1}$, $\rho_{\alpha} = -\frac{1}{n+1} \delta_{n+1-\alpha,1}$ и $e = -\frac{1}{n+1} \partial/\partial t^n$. Это поле параллельных векторов (т.е. $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t^{\alpha}}}(e) = 0$), поскольку, согласно лемме 2.3, координаты $\{t^i\}$ плоские. □

Леммы 2.1-2.4 доказывают следующее утверждение:

Теорема 2.1. Фробениусовы пары (M_p, θ_p) задают на M структуру Дубровина.

3. ФРОБЕНИУСОВЫ СТРУКТУРЫ

Следующие 5 разделов посвящены доказательству теоремы Дубровина, о естественном взаимно-однозначном соответствии между структурами дубровина и решениями WDVV уравнений. Для этого мы будем поэтапно "переписывать" геометрические аксиомы структуры Дубровина в удобной для доказательства аналитической форме.

В этом разделе мы покажем, что существование координатной системы, порождающей канонические базисы в касательном пространстве эквивалентно симметрии некоторого специального тензорного поля. Это свойство понадобится нам в дальнейшем для построения решения WDVV уравнений.

Определение 3.1. Пусть M — гладкое вещественное или комплексное многообразие. Почти фробениусовой структурой на M называется структура полупростой фробениусовой пары (M_p, θ_p) в касательном пространстве $M_p = T_p M$ в каждой точке $p \in M$, причем

- 1) тензор $\theta = \{\theta_p | p \in M\}$ гладкий;
- 2) канонические базисы алгебр M_p образуют гладкие векторные поля X_1, \dots, X_n .

Метрический тензор $g(a, b) = \theta(a \cdot b)$ дает связность $\nabla \in \text{Hom}(TM \otimes TM, TM)$, где $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$ и $\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X, Y]$.

Напомним, что

$$\begin{aligned} L_Z(g(X, Y)) &= (\nabla_Z g)(X, Y) + g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y), \\ L_U(C(X, Y, Z)) &= (\nabla_U C)(X, Y, Z) + C(\nabla_U X, Y, Z) + C(X, \nabla_U Y, Z) + C(X, Y, \nabla_U Z), \end{aligned}$$

где $X, Y, Z, U \in TM$, $C \in T^*M \otimes T^*M \otimes T^*M$ и L_Z — производная Ли.

Положим $c(a, b, d) = \theta(a \cdot b \cdot d)$ и $\gamma(V, X, Y, Z) = (\nabla_V c)(X, Y, Z)$.

Лемма 3.1. Пусть тензор $\gamma(X, Y, Z, V)$ симметричен относительно всех 4 переменных. Тогда:

- 1) $g(\nabla_{X_k} X_i, X_j) = 0$, если $k \neq i, i \neq j, k \neq j$.
- 2) $g(\nabla_{X_i} X_i, X_j) = g(\nabla_{X_j} X_j, X_i)$.
- 3) $g(\nabla_{X_i} X_j, X_i) = g(\nabla_{X_j} X_i, X_i)$.

Proof. По определению $\gamma(X_k, X_j, X_\ell, X_i) = (\nabla_{X_k} c)(X_j, X_\ell, X_i) =$
 $= L_{X_k}(c(X_j, X_\ell, X_i)) - c(\nabla_{X_k} X_j, X_\ell, X_i) - c(X_j, \nabla_{X_k} X_\ell, X_i) - c(X_j, X_\ell, \nabla_{X_k} X_i) =$
 $= L_{X_k}(\theta(X_j \cdot X_\ell \cdot X_i)) - \theta(\nabla_{X_k} X_j \cdot X_\ell \cdot X_i) - \theta(X_j \cdot \nabla_{X_k} X_\ell \cdot X_i) - \theta(X_j \cdot X_\ell \cdot \nabla_{X_k} X_i).$

Пусть $i \neq j, j \neq k, i \neq k$ Тогда $-g(\nabla_{X_k} X_i, X_j) = -\theta(\nabla_{X_k} X_i \cdot X_j \cdot X_j) =$
 $= L_{X_k}(\theta(X_i \cdot X_j \cdot X_j)) - \theta(\nabla_{X_k} X_i \cdot X_j \cdot X_j) - \theta(X_i \cdot \nabla_{X_k} X_j \cdot X_j) - \theta(X_i \cdot X_j \cdot \nabla_{X_k} X_j) =$
 $= \gamma(X_k, X_i, X_j, X_j) = \gamma(X_j, X_i, X_j, X_k) =$
 $L_{X_j}(\theta(X_i \cdot X_j \cdot X_k)) - \theta(\nabla_{X_j} X_i \cdot X_j \cdot X_k) - \theta(X_i \cdot \nabla_{X_j} X_j \cdot X_k) - \theta(X_i \cdot X_j \cdot \nabla_{X_k} X_k) = 0.$

Пусть $i \neq j$. Тогда $-g(\nabla_{X_i} X_i, X_j) = -\theta(\nabla_{X_i} X_i \cdot X_j \cdot X_j) =$
 $L_{X_i}(\theta(X_i \cdot X_j \cdot X_j)) - \theta(\nabla_{X_i} X_i \cdot X_j \cdot X_j) - \theta(X_i \cdot \nabla_{X_i} X_j \cdot X_j) - \theta(X_i \cdot X_j \cdot \nabla_{X_i} X_j) =$
 $= \gamma(X_i, X_i, X_j, X_j) = \gamma(X_j, X_j, X_i, X_i) = -g(\nabla_{X_j} X_j, X_i).$

Кроме того, если $i \neq j$, то $-g(\nabla_{X_i} X_j, X_i) = -\theta(\nabla_{X_i} X_j \cdot X_i \cdot X_i) =$
 $L_{X_i}(\theta(X_j \cdot X_i \cdot X_i)) - \theta(\nabla_{X_i} X_j \cdot X_i \cdot X_i) - \theta(X_j \cdot \nabla_{X_i} X_i \cdot X_i) - \theta(X_j \cdot X_i \cdot \nabla_{X_i} X_i) =$
 $\gamma(X_i, X_j, X_i, X_i) = \gamma(X_j, X_i, X_i, X_i) = L_{X_j}(\theta(X_i \cdot X_i \cdot X_i)) - 3\theta(\nabla_{X_j} X_i \cdot X_i \cdot X_i) =$
 $L_{X_j}(g(X_i, X_i)) - 3g(\nabla_{X_j} X_i, X_i) = 2g(\nabla_{X_j} X_i, X_i) - 3g(\nabla_{X_j} X_i, X_i) = -g(\nabla_{X_j} X_i, X_i). \quad \square$

Задача 3.1. Пусть M — многообразие с почти фробениусовой структурой, удовлетворяющее условиям 1-3 леммы 3.1. Тогда тензор $\gamma(X, Y, Z, V)$ симметричен относительно всех 4 переменных.

Определение 3.2. Пусть (x^1, \dots, x^n) — система координат на $U \subset M$. Она называется канонической, если векторы $\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n$ образуют канонический базис в каждой точке $p \in U$.

Определение 3.3. Почти фробениусова структура на M называется фробениусовой, если $d\theta = 0$ и каждая точка $p \in M$ имеет окрестность, обладающую каноническими координатами;и.

Задача 3.2. Пусть M — многообразие с фробениусовой структурой и (x^1, \dots, x^n) — каноническая система координат в $U \subset M$. Тогда существует функция $t : U \rightarrow \mathbb{K}$ такая, что $\theta = \sum_{i=1}^n \mu_i dx^i$, $g = \sum \mu_i dx^i \otimes dx^i$ и $c = \sum \mu_i dx^i \otimes dx^i \otimes dx^i$, где $\mu_i = \partial t / \partial x^i$.

Теорема 3.1. Почти фробениусова структура является фробениусовой, если и только если тензор $\gamma = \nabla C$ симметричен относительно всех 4 переменных.

Proof. Рассмотрим линейные формы $\eta^1, \dots, \eta^n \in T^*U$, образующие базис, двойственный к X_1, \dots, X_n в каждой точке $p \in U$. Положим $\mu_k = \theta(X_k)$. Тогда

$$\theta = \sum_k \mu_k \eta^k, \quad g = \sum_k \mu_k \eta^k \otimes \eta^k$$

и

$$g(\nabla_{X_i} X_j, X_k) = \sum_\ell \mu_\ell \eta^\ell(\nabla_{X_i} X_j) \cdot \eta^\ell(X_k) = \mu_k \eta^k(\nabla_{X_i} X_j).$$

С другой стороны, $\nabla_{X_i} \eta^k = \sum_j \alpha_j \eta^j$, где

$$\alpha_j = (\nabla_{X_i} \eta^k)(X_j) = L_{X_i}(\eta^k(X_j)) - \eta^k(\nabla_{X_i} X_j) = -\mu_k^{-1} g(\nabla_{X_i} X_j, X_k).$$

Таким образом,

$$\nabla_{X_i}\eta^k = -\sum_j \mu_k^{-1}g(\nabla_{X_i}X_j, X_k)\eta^j.$$

Пусть $\gamma = \nabla$ — симметричный тензор. Докажем, что $d\eta^k = 0$. Согласно лемме 3.1 если $i \neq k$, то

$$\nabla_{X_i}\eta^k = -\mu_k^{-1}g(\nabla_{X_i}X_i, X_k)\eta^i - \mu_i^{-1}g(\nabla_{X_i}X_k, X_k)\eta^k$$

и

$$\nabla_{X_k}\eta^k = -\sum_j \mu_k^{-1}g(\nabla_{X_k}X_j, X_k)\eta^j = -\sum_j \mu_k^{-1}g(\nabla_{X_j}X_k, X_k)\eta^j.$$

Согласно стандартным формулам дифференциальной геометрии

$$d\eta^k = \sum_i (\eta^i \wedge \nabla_{X_i}\eta^k).$$

откуда,

$$\begin{aligned} \mu_k d\eta^k &= \sum_i (\eta^i \wedge \mu_k \nabla_{X_i}\eta^k) = \sum_{i \neq k} (\eta^i \wedge \mu_k \nabla_{X_i}\eta^k) + \eta^k \wedge \mu_k \nabla_{X_k}\eta^k = \\ &= -\sum_{i \neq k} (\eta^i \wedge g(\nabla_{X_i}X_i, X_k)\eta^i + \eta^i \wedge g(\nabla_{X_i}X_k, X_k)\eta^k) - \eta^k \wedge \sum_j g(\nabla_{X_j}X_k, X_k)\eta^j = \\ &= -\sum_{i \neq k} g(\nabla_{X_i}X_k, X_k)\eta^i \wedge \eta^k - \sum_i g(\nabla_{X_i}X_k, X_k)\eta^k \wedge \eta^i = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $d\eta^k = 0$. Согласно лемме Пуанкаре в окрестности каждой точки $p \in U$ существуют функции x^k такие, что $dx^k = \eta^k$. Они дают координаты (x^1, \dots, x^n) такие, что $\partial/\partial x^i = X^i$.

С другой стороны, если $i \neq j$, то, согласно лемме 3.1,

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial x^j} = \frac{\partial(\theta(X_i))}{\partial x^j} = L_{X_j}(\theta(X_i)) = L_{X_j}(g(X_i, X_i)) = g(\nabla_{X_j}X_i, X_i) + g(X_i, \nabla_{X_j}X_i) = 2g(\nabla_{X_j}X_i, X_i) =$$

$$2g(\nabla_{X_i}X_j, X_i) = -2g(\nabla_{X_i}X_i, X_j). \text{ Аналогично } \frac{\partial \mu_j}{\partial x^i} = -2g(\nabla_{X_j}X_j, X_i).$$

Согласно лемме 3.1, отсюда следует, что

$$\frac{\partial \mu_j}{\partial x^i} = \frac{\partial \mu_i}{\partial x^j}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} d\theta &= d\left(\sum_{i=1}^n \mu_i \eta^i\right) = d\left(\sum_i \mu_i dx^i\right) = \sum_i d\mu_i \wedge dx^i = \\ &= \sum_i \left(\sum_j \frac{\partial \mu_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i\right) = 0. \end{aligned}$$

Обратное утверждение остается в качестве упражнения □

Пример 3.1. Найдем тензор γ для структуры из примера 2.1. Имеем $M = \mathbb{C}^n = \{(x^1, \dots, x^n)\}$, $(\sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i})(\sum_j b^j \frac{\partial}{\partial x^j}) = (\sum_i a^i b^i \frac{\partial}{\partial x^i})$ и $\theta(\sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i}) = \sum_i a_i$. Поэтому $c = \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i \otimes dx^i$, $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\nabla_{X_i} = \frac{\partial}{\partial x^i} = L_{X_i}$ и $\gamma(X_i, X_j, X_k, X_\ell) = (\nabla_{X_i}c)(X_j, X_k, X_\ell) = \frac{\partial}{\partial x^i}(c(X_j, X_k, X_\ell)) - c(\frac{\partial}{\partial x^i}X_j, X_k, X_\ell) - c(X_j, \frac{\partial}{\partial x^i}X_k, X_\ell) - c(X_j, X_k, \frac{\partial}{\partial x^i}X_\ell) = 0$.

Пример 3.2. Построим почти фробениусову структуру, которая не является фробениусовой. Пусть

$$M = \mathbb{R}^2 \setminus 0 = \{(x^1, x^2)\}, \quad r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{x^2}{x^1}.$$

Пусть далее $p = (r, \varphi) \in M$. Тогда $\partial/\partial r, \partial/\partial \varphi$ образуют базис M_p . Положим

$$\left(a_r \frac{\partial}{\partial r}, a_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \cdot \left(b_r \frac{\partial}{\partial r}, b_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) = \left(a_r b_r \frac{\partial}{\partial r}, a_\varphi b_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$$

и $\theta = dr + r^2 d\varphi$. Таким образом, мы построили почти фробениусову структуру. Но $d\theta = 2rdr \wedge d\varphi \neq 0$. Таким образом, она не фробениусова.

4. УРАВНЕНИЯ ДАРБУ–ЕГОРОВА

В этом разделе мы покажем, что записанное в канонических координатах условие нулевой кривизны и параллельности поля единиц эквивалентно классическим уравнениям Дарбу–Егорова, описывающим ортогональные системы координат в плоском пространстве. Далее мы связываем с уравнениями Дарбу–Егорова систему уравнений типа Пфаффа, решения которой, как мы увидим в дальнейшем, описывают геодезические дубровинской метрики.

Пусть M — многообразие с фробениусовой структурой. Тогда для в окрестности $U \ni p$ точки $p \in M$ существуют канонические координаты (x^1, \dots, x^n) и функция $t : U \rightarrow \mathbb{C}$ такая, что $\theta = dt$. В этих координатах единица, линейная форма и метрика имеют вид

$$e = \sum_{i=1}^n \partial_i, \quad \theta = \sum_i \mu_i dx^i, \quad g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j) = \mu_i \delta_{ij}$$

, где $\partial_i = \partial/\partial x^i$ и $\mu_i = \partial_i t$.

Для $i \neq j$ положим

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial_j \sqrt{\mu_i}}{\sqrt{\mu_j}} = \frac{1}{2} \frac{\partial_j \mu_i}{\sqrt{\mu_i \mu_j}} = \frac{1}{2} \frac{\partial_j \partial_j t}{\sqrt{\mu_i \mu_j}} = \gamma_{ji}.$$

Тогда символы Кристоффеля $\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij})$ равны 0 при $i \neq j \neq k, i \neq k$ и

$$\Gamma_{ik,i} = \Gamma_{ki,i} = \frac{1}{2} \partial_i \mu_k = -\Gamma_{ii,k} = \sqrt{\mu_i \mu_j} \gamma_{ij}$$

при $i \neq k$.

Лемма 4.1. Если $\nabla e = 0$, то $\sum_{i=1}^n \partial_i \sqrt{\mu_k} = \sum_{i=1}^n \partial_i \gamma_{kj} = 0$.

Proof. Положим $g^{ks} = (g^{-1})_{ks} = \mu_k^{-1} \delta_{ks}$ и $\Gamma_{ij}^k = \sum_s g^{ks} \Gamma_{ij,s} = \mu_k^{-1} \Gamma_{ij,k}$.

Условие $\nabla e = 0$ влечет

$$0 = \nabla_{\partial_j} \left(\sum_i \partial_i \right) = \sum_i (\nabla_{\partial_j} \partial_i) = \sum_i \left(\sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k \right) = \sum_k \left(\sum_i \Gamma_{ij}^k \right) \partial_k.$$

Следовательно, $\sum_i \Gamma_{ij}^k = 0$. В частности, $\sum_i \Gamma_{ik}^k = 0$ и

$$\begin{aligned} 0 &= \Gamma_{kk}^k + \sum_{i \neq j} \Gamma_{ik}^k = \mu_k^{-1} \Gamma_{kk,k} + \mu_k^{-1} \sum_{i \neq k} \Gamma_{ik,k} = \frac{1}{2} \mu_k^{-1} \partial_k \mu_k + \frac{1}{2} \mu_k^{-1} \sum_{i \neq k} \partial_k \mu_i = \\ &= \frac{1}{2} \mu_k^{-1} \partial_k \mu_k + \mu_k^{-1} \sum_{i \neq k} \sqrt{\mu_k \mu_i} \gamma_{ki} = \frac{1}{2} \mu_k^{-1} \partial_k \mu_k + \sum_{i \neq k} \sqrt{\frac{\mu_i}{\mu_k}} \gamma_{ki}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial_k \mu_k}{\sqrt{\mu_k}} + \sum_{i \neq k} \sqrt{\mu_i} \gamma_{ki} = 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^n \partial_i \sqrt{\mu_k} = \partial_k \sqrt{\mu_k} + \sum_{i \neq k} \partial_i \sqrt{\mu_k} = \frac{1}{2} \frac{\partial_k \mu_k}{\sqrt{\mu_k}} + \sum_{i \neq j} \sqrt{\mu_i} \gamma_{ik} = 0.$$

Это дает

$$\sum_{i=1}^n \partial_i \sqrt{\mu_j \mu_k} = \sum_{i=1}^n \sqrt{\mu_j} \partial_i \sqrt{\mu_k} + \sum_{i=1}^n \sqrt{\mu_k} \partial_i \sqrt{\mu_j} = 0.$$

В частности, $\sum_{i=1}^n \partial_i \mu_k = 0$. Значит, при $j \neq k$

$$0 = \sum_{i=1}^n \partial_i (\partial_j \mu_k) = 2 \sum_{i=1}^n \partial_i (\sqrt{\mu_j \mu_k} \gamma_{jk}) = 2(\gamma_{jk} \sum_{i=1}^n \partial_i \sqrt{\mu_j \mu_k} + \sqrt{\mu_j \mu_k} \sum_{i=1}^n \partial_i \gamma_{jk}) = 2\sqrt{\mu_j \mu_k} \sum_{i=1}^n \partial_i \gamma_{jk}.$$

□

Задача 4.1. Доказать, что $\nabla e = 0$, если и только если для всех k выполнено равенство $\sum_{i=1}^n \partial_i \sqrt{\mu_k} = 0$.

Задача 4.2. Доказать, что $\nabla e = 0$, если и только если $\nabla \theta = 0$.

Лемма 4.2. Если метрика g плоская, то $\partial_\ell \gamma_{ij} = \gamma_{i\ell} \gamma_{\ell j}$ для попарно различных i, j, ℓ .

Proof. Нам понадобится равенство

$$\partial_\ell \sqrt{\mu_i \mu_j} = \frac{1}{2\sqrt{\mu_i \mu_j}} (\mu_j \partial_\ell \mu_i + \mu_i \partial_\ell \mu_j) = \frac{1}{2\sqrt{\mu_i \mu_j}} (\mu_j \cdot 2\sqrt{\mu_\ell \mu_i} \gamma_{\ell i} + \mu_i \cdot 2\sqrt{\mu_i \mu_j} \gamma_{ij}) = \sqrt{\mu_\ell \mu_j} \gamma_{\ell i} + \sqrt{\mu_\ell \mu_i} \gamma_{\ell j}.$$

Компоненты тензора кривизны равны

$$R_{ikjl} = \frac{1}{2} (\partial_k \partial_j g_{i\ell} + \partial_i \partial_\ell g_{kj} - \partial_k \partial_\ell g_{ij}) + \sum_{ab} g^{ab} (\Gamma_{kj,a} \Gamma_{i\ell,b} - \Gamma_{k\ell,a} \Gamma_{ij,b}),$$

где $g_{ij} = \delta_{ij} \mu_i$, $g^{ij} = \delta_{ij} \mu_i^{-1}$. Таким образом, равенство $R_{ij,j\ell} = 0$ для попарно различных i, j, ℓ влечет

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \partial_i \partial_\ell g_{jj} + \mu_i^{-1} \Gamma_{jj,i} \Gamma_{i\ell,i} + \mu_\ell^{-1} \Gamma_{jj,\ell} \Gamma_{i\ell,\ell} - \mu_j^{-1} \Gamma_{j\ell,j} \Gamma_{ij,j} = \\ &= \frac{1}{2} \partial_i \partial_\ell \mu_j - \mu_i^{-1} (\sqrt{\mu_i \mu_j} \gamma_{ij} \cdot \sqrt{\mu_i \mu_\ell} \gamma_{i\ell}) - \mu_\ell^{-1} (\sqrt{\mu_j \mu_\ell} \gamma_{j\ell} \cdot \sqrt{\mu_i \mu_\ell} \gamma_{i\ell}) - \mu_j^{-1} (\sqrt{\mu_j \mu_\ell} \gamma_{j\ell} \cdot \sqrt{\mu_i \mu_j} \gamma_{ij}) = \\ &= \partial_\ell (\sqrt{\mu_i \mu_j} \gamma_{ij}) - \sqrt{\mu_j \mu_\ell} \gamma_{ij} \gamma_{i\ell} - \sqrt{\mu_j \mu_i} \gamma_{j\ell} \gamma_{i\ell} - \sqrt{\mu_\ell \mu_i} \gamma_{j\ell} \gamma_{ij} = \end{aligned}$$

$$\sqrt{\mu_j \mu_\ell} \partial_\ell \gamma_{ij} + \gamma_{ij} \partial_\ell \sqrt{\mu_i \mu_j} - \sqrt{\mu_j \mu_\ell} \gamma_{ij} \gamma_{i\ell} - \sqrt{\mu_j \mu_i} \gamma_{i\ell} \gamma_{j\ell} - \sqrt{\mu_\ell \mu_i} \gamma_{j\ell} \gamma_{ij}.$$

Таким образом, равенство

$$\partial_\ell \sqrt{\mu_i \mu_j} = \sqrt{\mu_\ell \mu_j} \gamma_{\ell i} + \sqrt{\mu_\ell \mu_i} \gamma_{\ell j}$$

влечет

$$0 = \sqrt{\mu_i \mu_j} (\partial_\ell \gamma_{ij} - \gamma_{j\ell} \gamma_{i\ell}).$$

□

Задача 4.3. Доказать, что если $\sum_{k=1}^n \partial_k \gamma_{ij} = 0$ и $\partial_\ell \gamma_{ij} = \gamma_{i\ell} \gamma_{\ell j}$ для всех $\ell \neq i, j$, то g является плоской метрикой.

Леммы 4.1 и 4.2 приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} \partial_k \gamma_{ij} = \gamma_{ik} \gamma_{kj} \quad (k \neq i, j, \quad i \neq j, \quad i, j, k = 1, \dots, n), \\ \sum_{k=1}^n \partial_k \gamma_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \end{cases}.$$

Она называется системой Дарбу-Егорова и впервые она возникла в конце XIX века в работах Егорова и Дарбу, связанных с описанием плоских метрик в системах ортогональных координат. Значительно позже было найдено, что эти же уравнения описывают взаимодействие n волн.

Наша ближайшая цель — изучить множество решений этой системы.

Определение 4.1. Рассмотрим матрицы $\Gamma = \{\gamma_{ij}\}$, где $\gamma_{ii} = 0$, и $E_k = \{(E_k)_{ij}\}$, где $(E_k)_{ij} = \delta_{ik} \delta_{jk}$. Обозначим через H пространство вектор-функций $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \dots \\ \psi_n \end{pmatrix}$ таких, что $\partial_k \psi = -[E_k, \Gamma] \psi$.

Теорема 4.1. Пусть $\nabla e = 0$ и метрика g плоская. Тогда:

- 1) $\psi \in H$, если и только если $\sum_{k=1}^n \partial_k \psi_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$) и $\partial_k \psi_i = \gamma_{ik} \psi_k$ при $k \neq i$;
- 2) $\begin{pmatrix} \gamma_{1j} \\ \dots \\ \gamma_{nj} \end{pmatrix} \in H$ при всех j , то есть $[E_j, \partial_k \Gamma] = -[E_k, \Gamma][E_j, \Gamma]$;
- 3) $\dim H = n$.

Proof. 1) По определению,

$$-[E_k, \Gamma] \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \dots \\ \psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{1k} \psi_k \\ \dots \\ \gamma_{k-1,k} \psi_k \\ -\sum_{i=1}^n \gamma_{ik} \psi_i \\ \gamma_{k+1,k} \psi_k \\ \dots \\ \gamma_{nk} \psi_k \end{pmatrix}$$

и система $\partial_k \psi = -[E_k, \Gamma] \psi$ эквивалентна системе

$$\begin{aligned} \partial_k \psi_i &= \gamma_{ik} \psi_k \quad (i \neq k), \\ \partial_k \psi_k &= -\sum_{i=1}^n \gamma_{ik} \psi_i. \end{aligned}$$

Эта система эквивалентна

$$\partial_k \psi_i = \gamma_{ik} \psi_k \quad (i \neq k),$$

$$\partial_k \psi_k = - \sum_{i \neq k} \gamma_i \psi_k.$$

2) Положим $\psi_i = \gamma_{ij}$. Тогда согласно леммам 4.1 и 4.2 $\partial_k \psi_i = \gamma_{ik} \psi_k$ для $i \neq k$ и $\sum_{k=1}^n \partial_k \psi_i = 0$. Таким образом, утверждение 1) этой теоремы дает

$$\partial_k \begin{pmatrix} \gamma_{1j} \\ \dots \\ \gamma_{nj} \end{pmatrix} = \partial_k \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \dots \\ \psi_n \end{pmatrix} = -[E_k, \Gamma] \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \dots \\ \psi_n \end{pmatrix} = -[E_k, \Gamma] \begin{pmatrix} \gamma_{1j} \\ \dots \\ \gamma_{nj} \end{pmatrix}.$$

3) Система $\partial_k \psi = -[E_k, \Gamma] \psi$ ($k = 1, \dots, n$) является системой типа Пфаффа. Она совместна, если и только если $\partial_j([E_k, \Gamma] \psi) = \partial_k([E_j, \Gamma] \psi)$ для все $\psi \in H$

Утверждения 1) и 2) влекут

$$\begin{aligned} \partial_j([E_k, \Gamma] \psi) &= \partial_j([E_k, \Gamma]) \psi + [E_k, \Gamma] \partial_j \psi = [E_k, \partial_j \Gamma] \psi + [E_k, \Gamma] \partial_j \psi = \\ &= -[E_j, \Gamma][E_k, \Gamma] \psi - [E_k, \Gamma][E_j, \Gamma] \psi = \partial_k([E_j, \Gamma] \psi). \end{aligned}$$

Таким образом, система $\partial_k \psi = -[E_k, \Gamma] \psi$ ($k = 1, \dots, n$) совместна. Согласно теории систем типа Пфаффа отсюда следует, что размерность пространств решений этой системы равна n . \square

5. ЭЙЛЕРОВО ПОЛЕ

В этом разделе мы покажем, что Эйлериовое поле дубровинской структуры порождает линейный оператор в пространстве решений построенной в предыдущем параграфе системы типа Пфаффа. Собственные вектора этой системы порождают плоскую систему координат в которой, как мы увидим в следующем разделе, дубровинская метрика приводится к антидиагональному виду.

Определение 5.1. Пусть M — многообразие, наделенное фробениусовой структурой, (x^1, \dots, x^n) — канонические координаты и $\theta = \sum_{i=1}^n \mu_i dx^i$. Поле $E = \sum_{i=1}^n x^i \partial_i$, где $\partial_i = \partial / \partial x^i$, называется эйлериовым. Координаты x^i называются однородными, если $L_E \mu_i = t \mu_i$, где $t = \text{const}$.

Лемма 5.1. Пусть (x^1, \dots, x^n) — однородные канонические координаты. Тогда $L_E \theta = (t+1)\theta$, $L_E g = (t+2)g$, $L_E c = (t+3)c$, $L_E e = -e$, $L_E \gamma_{ij} = -\gamma_{ij}$.

Proof. Напомним, что если

$$T = \sum T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}$$

и $E = \sum E^k \partial_k$, то

$$L_E T = \sum (L_E T)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q},$$

где

$$\begin{aligned} (L_E T)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} &= \sum_k E^k \partial_k T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + \sum_k T_{k j_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \partial_{j_1} E^k + \dots + \\ &\dots + \sum_k T_{j_1 \dots j_{q-1} k}^{i_1 \dots i_p} \partial_{j_q} E^k - \sum_k T_{j_1 \dots j_q}^{k i_2 \dots i_p} \partial_k E^{i_1} - \dots - \sum_k T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_{p-1} k} \partial_k E^{i_p}. \end{aligned}$$

Таким образом, если $E = \sum_{k=1}^n x^k \partial_k$, то

$$t \mu_i = L_E \mu_i = \sum_{k=1}^n x^i \partial_k \mu_i$$

и

$$\begin{aligned} L_E\theta &= L_{\sum x^k \partial_k} \left(\sum \mu_i \cdot dx^i \right) = \sum_j \left(\sum_k x^k \partial_k \mu_j + \sum_k \mu_j \partial_j x^k \right) dx^j = \\ &= \sum_j (m \mu_j + \mu_j) dx^j = (m+1) \sum_j \mu_j dx^j = (m+1)\theta. \end{aligned}$$

Аналогично $L_E g = (m+2)g$, $L_E c = (m+3)c$ и $L_E e = -e$. Наконец,

$$\begin{aligned} L_E \gamma_{ij} &= L_E \left(\frac{1}{\sqrt{\mu_i \mu_j}} \partial_j \mu_i \right) = \\ &= -\frac{1}{2} (\mu_i \mu_j)^{-\frac{3}{2}} L_E (\mu_i \mu_j) \partial_j \mu_i + (\mu_i \mu_j)^{-\frac{1}{2}} L_E \partial_j \mu_i = \\ &= -\frac{1}{2} (\mu_i \mu_j)^{-\frac{3}{2}} (2m \mu_i \mu_j) \partial_j \mu_i + (\mu_i \mu_j)^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_k x^k \partial_j \partial_i \mu_i \right) = \\ &= -m (\mu_i \mu_j)^{-\frac{1}{2}} \partial_j \mu_i + (\mu_i \mu_j)^{-\frac{1}{2}} \left(\partial_j \sum_k x^k \partial_k \mu_i - \partial_j \mu_i \right) = \\ &= (\mu_i \mu_j)^{-\frac{1}{2}} (-m \partial_j \mu_i + \partial_j L_E \mu_i - \partial_j \mu_i) = \\ &= (\mu_i \mu_j)^{-\frac{1}{2}} (-m \partial_j \mu_i + \partial_j m \mu_i - \partial_j \mu_i) = -(\mu_i \mu_j)^{-\frac{1}{2}} \partial_j \mu_i = -\gamma_{ij}. \end{aligned}$$

□

Задача 5.1. Доказать, что канонические координаты однородны, если и только если $L_E \theta = (m+1)\theta$.

Задача 5.2. Пусть φ — группа диффеоморфизмов, порожденная E , и пусть канонические координаты однородны. Тогда $\varphi_t(a)\varphi_t(b) = k_t \varphi_t(a \cdot b)$. Таким образом, φ_t порождает деформацию фробениусовых алгебр.

Положим

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ и } V = [\Gamma, X].$$

Следующая лемма показывает, что уравнения Дарбу-Егорова с условием однородности имеют лаксово представление.

Лемма 5.2. $\partial_k V = [V, [E_k, \Gamma]]$.

Proof. По определению, $V_{ij} = (x^j - x^i)\gamma_{ij}$, если $i \neq j$, $V_{ii} = 0$ и $([E_k, \Gamma])_{ij} = \delta_{ki}\gamma_{kj} - \delta_{kj}\gamma_{ki}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} ([V, [E_k, \Gamma]])_{ij} &= \sum_s V_{is} ([E_k, \Gamma])_{sj} - \sum_s ([E_k, \Gamma])_{is} V_{sj} = \\ &= \sum_s (x^s - x^i) \gamma_{is} (\delta_{ks} \gamma_{kj} - \delta_{kj} \gamma_{ks}) - \sum_s (\delta_{ki} \gamma_{ks} - \delta_{ks} \gamma_{ki}) (x^j - x^s) \gamma_{sj} = \\ &= (x^k - x^i) \gamma_{ik} \gamma_{kj} - \sum_s (x^s - x^i) \gamma_{is} \delta_{kj} \gamma_{ks} - \sum_s \delta_{ki} \gamma_{ks} (x^j - x^s) \gamma_{sj} + \gamma_{ki} (x^j - x^k) \gamma_{kj} = \\ &= (x^j - x^i) \gamma_{ik} \gamma_{kj} - \delta_{kj} \sum_s (x^s - x^i) \gamma_{is} \gamma_{sk} - \delta_{ki} \sum_s (x^j - x^s) \gamma_{js} \gamma_{sk}. \end{aligned}$$

Если $k \neq i \neq j$, то $([V, [E_k, \Gamma]])_{ij} = (x^j - x^i)\gamma_{ik}\gamma_{kj}$ и согласно лемме 4.2 $\partial_k V_{ij} = \partial_k((x^j - x^i)\gamma_{ij}) = (x^j - x^i)\partial_k\gamma_{ij} = (x^j - x^i)\gamma_{ik}\gamma_{kj} = ([V, [E_k, \Gamma]])_{ij}$. Если $k = i \neq j$, то $([V, [E_k, \Gamma]])_{ij} = -\sum_s (x^j - x^s)\gamma_{js}\gamma_{si}$ и согласно леммам 4.1, 4.2 и 5.1 имеем

$$\begin{aligned}\partial_i V_{ij} &= \partial_i[(x^j - x^i)\gamma_{ij}] = -\gamma_{ij} + (x^j - x^i)\partial_i\gamma_{ij} = L_E\gamma_{ij} + x^j\partial_i\gamma_{ij} - x^i\partial_i\gamma_{ij} = \\ &= \left(\sum_{s=1}^n x^s\partial_s\gamma_{ij} - x^i\partial_i\gamma_{ij}\right) + (x^j\partial_i\gamma_{ij} - x^j\sum_{s=1}^n \partial_s\gamma_{ij}) = \\ &= \sum_{s \neq i} x^s\partial_s\gamma_{ij} - \sum_{s \neq i} x^j\partial_s\gamma_{ij} = \sum_{s \neq i} (x^s - x^j)\partial_s\gamma_{ij} = \\ &= \sum_{s \neq i, j} (x^s - x^j)\partial_s\gamma_{i, j} = \sum_{s \neq ij} (x^s - x^j)\gamma_{is}\gamma_{sj} = ([V, [E_i, \Gamma]])_{ij}.\end{aligned}$$

□

Теорема 5.1. 1) Если $\psi \in H$, то $L_E\psi = V\psi$. 2) $V(x)H \subset H$ для всех $x \in U$. 3) Если $\psi \in H$ и $V(x_0)\psi(x_0) = \lambda\psi(x_0)$ для некоторого $x_0 \in M$, то $V(x)\psi(x) = \lambda\psi(x)$ для всех $x \in M$.

Proof. 1)

$$L_E\psi = \sum_{i=1}^n x^i\partial_i\psi = -\sum_{i=1}^n x^i[E_i, \Gamma]\psi = [\Gamma, \sum_{i=1}^n x^i E_i]\psi = [\Gamma, X]\psi = V\psi.$$

2) Пусть $\psi \in H$. Тогда согласно лемме 5.2

$$\begin{aligned}\partial_k(V\psi) &= (\partial_k V)\psi + V\partial_k\psi = [V, [E_k, \Gamma]]\psi - V[E_k, \Gamma]\psi = \\ &= V[E_k, \Gamma]\psi - [E_k, \Gamma]V\psi - V[E_k, \Gamma]\psi = -[E_k, \Gamma](V\psi).\end{aligned}$$

Следовательно, $V\psi \in H$.

3) Пусть $\psi = (\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^n)$ — базис H (теорема 4.1) и $\psi = \psi^1$. Тогда согласно утверждению (2) $V(x)\psi^i = \sum_{j=1}^n m_j^i \psi^j$, где $m_j^i = \text{const}$. Следовательно, если $V(x_0)\psi(x_0) = \lambda\psi(x_0)$, то $m_j^1 = \lambda\delta_{1j}$ и $V(x)\psi = \lambda\psi$. □

Лемма 5.3. Вектор

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_1} \\ \dots \\ \sqrt{\mu_n} \end{pmatrix}$$

принадлежит H и $V\Phi = \frac{m}{2}\Phi$.

Proof. По определению

$$\partial_k\sqrt{\mu_i} = \gamma_{ik}\sqrt{\mu_k} \quad (i \neq k, \quad i, k = 1, \dots, n).$$

Согласно лемме 4.1,

$$\sum_{k=1}^n \partial_k\sqrt{\mu_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Следовательно, согласно теореме 4.1, $\Phi \in H$. Кроме того,

$$L_E\sqrt{\mu_i} = \frac{1}{2}(\mu_i)^{-\frac{1}{2}}L_E\mu_i = \frac{1}{2}(\mu_i)^{-\frac{1}{2}}m\mu_i = \frac{m}{2}\sqrt{\mu_i},$$

и, согласно теореме 5.1

$$V\Phi = L_E\Phi = \frac{m}{2}\Phi.$$

□

Для векторов $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in K^n$ положим

$$(a, b) = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

В частности, две вектор-функции

$$\psi^\alpha = \begin{pmatrix} \psi_1^\alpha \\ \dots \\ \psi_n^\alpha \end{pmatrix} \text{ и } \psi^\beta = \begin{pmatrix} \psi_1^\beta \\ \dots \\ \psi_n^\beta \end{pmatrix}$$

порождают функцию

$$(\psi^\alpha, \psi^\beta) = \sum_{i=1}^n \psi_i^\alpha \psi_i^\beta.$$

Теорема 5.2. Пусть матрица $V(x_0)$ имеет вид $n = \dim H$ попарно различных собственных значений. Тогда существует содержащий вектор $\psi^\epsilon = \Phi$ базис (ψ^1, \dots, ψ^n) пространства H такой, что

$$\Phi \in (\psi^1, \dots, \psi^n), \quad V\psi^\alpha = \lambda_\alpha \psi^\alpha \quad (\lambda_\alpha = \text{const},$$

$$(\psi^\alpha, \psi^\beta) = \delta_{\alpha+\beta, n+1}, \quad \lambda_\alpha + \lambda_{n+1-\alpha} = 0.$$

Proof. Доказательство. Пусть базис $\psi^1, \dots, \psi^n \in H$ таков, что

$$V(x_0)\psi^\alpha(x_0) = \lambda_\alpha \psi^\alpha(x_0).$$

Согласно лемме 5.3 можно считать, что $\Phi \in (\psi^1, \dots, \psi^n)$. Согласно теореме 5.1 $V\psi^\alpha = \lambda_\alpha \psi^\alpha$. Матрица V антисимметрична и, следовательно,

$$\lambda_\alpha (\psi^\alpha, \psi^\beta) = (V\psi^\alpha, \psi^\beta) = -(\psi^\alpha, V\psi^\beta) = -\lambda_\beta (\psi^\alpha, \psi^\beta).$$

Таким образом, $(\psi^\alpha, \psi^\beta) \neq 0$, если и только если $\lambda_\alpha + \lambda_\beta = 0$. Но векторы $\psi^1(x_0), \dots, \psi^n(x_0)$ образуют базис \mathbb{K}^n и, в частности, матрица Грама $(\psi^\alpha(x_0), \psi^\beta(x_0))$ невырождена. Отсюда следует, что в множестве $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ число собственных значений, равных λ , равно числу собственных значений, равных $-\lambda$, для каждого $\lambda \in \mathbb{K}$. Таким образом, можно занумеровать собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ так, чтобы $\lambda_\alpha + \lambda_{n+1-\alpha} = 0$ и $(\psi^\alpha, \psi^\beta) = \sigma_\alpha \delta_{\alpha, n+1-\beta}$, где $\sigma_\alpha^{(\alpha)} \neq 0$. Заменяем теперь ψ^α на $\psi^\alpha / \sqrt{\sigma_\alpha}$. □

6. ПОТЕНЦИАЛ

В этом разделе мы используем результаты предыдущих 3 разделов для построения плоских координат дубровинской метрики и построения функции, производные которой порождают структурные константы фробениусовых алгебр на касательных пространствах.

Определение 6.1. Пусть $U \subset M$ — область в многообразии со структурой Дубровина. Координаты $(t^1, \dots, t^n) : U \rightarrow \mathbb{K}^n$ называются плоскими квазиоднородными, если

$$g = \sum_{\alpha, \beta} \delta_{\alpha+\beta, n+1} dt^\alpha \otimes dt^\beta,$$

$$e = \frac{\partial}{\partial t^\epsilon},$$

$$E = \sum_{\alpha=1}^n (d_\alpha t^\alpha + r_\alpha) \frac{\partial}{\partial t^\alpha},$$

где $d_\epsilon = 1$, d_α и $r_\alpha = \text{const}$, $d_\alpha r_\alpha = 0$ и $\lambda_\alpha = \frac{m}{2} - d_\alpha + 1$ — собственные значения матрицы $V(x_0)$. Числа d_1, \dots, d_n называются степенями.

Определение 6.2. Структура Дубровина называется диагонализируемой, если матрица $V(x_0)$ имеет $n = \dim M$ попарно различных собственных значений.

Согласно теореме 5.2 это определение не зависит от выбора x_0 .

Теорема 6.1. Если структура Дубровина на M диагонализируема, то в окрестности $x_0 \in M$ существуют плоские квазиоднородные координаты.

Proof. Пусть (ψ^1, \dots, ψ^n) — базис H , описанный в теореме 5.2, причем $t^\epsilon = \Phi$. Согласно теореме 4.1,

$$\partial_j(\sqrt{\mu_i} \psi_i^\alpha) = \partial_j(\sqrt{\mu_i}) \psi_i^\alpha + \sqrt{\mu_i} \partial_j \psi_i^\alpha = \sqrt{\mu_j} \gamma_{ij} \psi_i^\alpha + \sqrt{\mu_i} \gamma_{ij} \psi_j^\alpha = \partial_i(\sqrt{\mu_j} \psi_j^\alpha).$$

Следовательно, согласно лемме Пуанкаре существуют окрестность $U \ni x_0$ и функция $t^{n+1-\alpha} : U \rightarrow \mathbb{K}$ такие, что $\partial_i t^{n+1-\alpha} = \sqrt{\mu_i} \psi_i^\alpha = \Phi_i \psi_i^\alpha$. Согласно теореме 5.2 векторы $\psi^1(x), \dots, \psi^n(x)$ линейно независимы при каждом $x \in U$. Поэтому (t^1, \dots, t^n) образуют координаты на U .

Пусть $\eta_{\alpha\beta} = g(\partial/\partial t^\alpha, \partial/\partial t^\beta)$. Тогда

$$g = \sum_{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta} dt^\alpha \otimes dt^\beta = \sum_{ij} g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

где $g_{ij} = \mu_i \delta_{ij}$. Положим

$$\hat{g} = \sum_{\alpha\beta} \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial t^\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial t^\beta} = \sum_{ij} g^{ij} \partial_i \otimes \partial_j,$$

где $(\eta^{\alpha\beta})$ и (g^{ij}) — матрицы, обратные к $(\eta_{\alpha\beta})$ и (g_{ij}) .

Тогда

$$\begin{aligned} \eta^{\alpha\beta} &= \hat{g}(dt^\alpha \otimes dt^\beta) = \sum_{ij} \partial_i t^\alpha \partial_j t^\beta g^{ij} = \sum_{ij} \sqrt{\mu_i} \psi_i^{n+1-\alpha} \sqrt{\mu_j} \psi_j^{n+1-\beta} \frac{\delta_{ij}}{\mu_i} = \\ &= \sum_i \psi_i^{n+1-\alpha} \psi_i^{n+1-\beta} = (\psi^{n+1-\alpha}, \psi^{n+1-\beta}) = \delta_{(n+1-\alpha)+(n+1-\beta), n+1} = \delta_{\alpha+\beta, n+1}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\eta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha+\beta, n+1}$ и $g = \sum \delta_{\alpha+\beta, n+1} dt^\alpha \otimes dt^\beta$.

Пусть

$$e = \sum_{\alpha} \rho_\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\delta_{\beta, n+1-\epsilon} &= dt^{n+1-\epsilon} \left(\frac{\partial}{\partial t^\beta} \right) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial t^{n+1-\epsilon}}{\partial x^i} dx^i \right) \left(\frac{\partial}{\partial t^\beta} \right) = \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{\mu_i} \psi_i^1 dx^i \right) \left(\frac{\partial}{\partial t^\beta} \right) = \left(\sum_{i=1}^n \mu_i dx^i \right) \left(\frac{\partial}{\partial t^\beta} \right) = \theta \left(\frac{\partial}{\partial t^\beta} \right) = \\
&= g \left(e, \frac{\partial}{\partial t^\beta} \right) = g \left(\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial t^{\beta}} \right) = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} g \left(\frac{\partial}{\partial t^{\alpha}}, \frac{\partial}{\partial t^{\beta}} \right) = \\
&= \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \delta_{\alpha+\beta, n+1} = \rho_{n+1-\beta}.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\rho_{\beta} = \delta_{n+1-\beta, n+1-\epsilon} = \delta_{\beta, \epsilon}$ и $e = \partial/\partial t^{\epsilon}$.

Пусть

$$E = \sum_{i=1}^n x^i \partial_i = \sum_{\alpha=1}^n E^{\alpha} \frac{\partial}{\partial t^{\alpha}}.$$

Тогда

$$E^{\alpha} = \sum_{i=1}^n x^i \partial_i t^{\alpha} = L_E(t^{\alpha}).$$

Согласно лемме 5.3 и теореме 5.2

$$\begin{aligned}
\partial_i(E^{\alpha}) &= \partial_i(L_E t^{\alpha}) = \partial_i \left(\sum_j x^j \partial_j t^{\alpha} \right) = \\
&= \partial_i t^{\alpha} + \sum_j x^j \partial_j \partial_i t^{\alpha} = \Phi_i \psi_i^{n+1-\alpha} + L_E(\Phi_i \psi_i^{n+1-\alpha}) = \\
&= \Phi_i \psi_i^{n+1-\alpha} + (L_E \Phi_i) \psi_i^{n+1-\alpha} + \Phi_i (L_E \psi_i^{n+1-\alpha}) = \\
&= \Phi_i \psi_i^{n+1-\alpha} + \frac{m}{2} \Phi_i \psi_i^{n+1-\alpha} + \lambda_{n+1-\alpha} \Phi_i \psi_i^{n+1-\alpha} = d_{\alpha} \partial_i t^{\alpha}.
\end{aligned}$$

Следовательно, $E^{\alpha} = d_{\alpha} t^{\alpha} + r_{\alpha}$, где $r_{\alpha} = \text{const}$ и, если $d_{\alpha} \neq 0$, то замена $t^{\alpha} \mapsto t^{\alpha} - r_{\alpha}/d_{\alpha}$ переводит r_{α} в 0.

Согласно лемме 5.1,

$$-\frac{\partial}{\partial t^{\epsilon}} = -e = L_E e = L_{(\sum_{\alpha} (d_{\alpha} t^{\alpha} + r_{\alpha}) \frac{\partial}{\partial t^{\alpha}})} \left(\frac{\partial}{\partial t^{\epsilon}} \right) = d_{\epsilon} \frac{\partial}{\partial t^{\epsilon}},$$

то есть $d_{\epsilon} = 1$ □

Определение 6.3. Пусть (t^1, \dots, t^n) — плоские квазиоднородные координаты в $U \subset M$. Функция $F(t^1, \dots, t^n)$ называется потенциалом структуры Дубровина, если

$$\theta \left(\frac{\partial}{\partial t^{\alpha}} \cdot \frac{\partial}{\partial t^{\beta}} \cdot \frac{\partial}{\partial t^{\gamma}} \right) = \frac{\partial^3 F}{\partial t^{\alpha} \partial t^{\beta} \partial t^{\gamma}}.$$

Теорема 6.2. При любом выборе плоских квазиоднородных координат (t^1, \dots, t^n) в $U \ni x_0$ существует область $x_0 \in \tilde{U} \subset U$, на которой структура обладает потенциалом $F(t^1, \dots, t^n)$.

Proof. Положим

$$c_{\alpha\beta\gamma} = \theta \left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\gamma} \right)$$

и

$$c = \sum_{\alpha\beta\gamma} c_{\alpha\beta\gamma} dt^\alpha \otimes dt^\beta \otimes dt^\gamma.$$

Поскольку координаты (t^1, \dots, t^n) плоские,

$$\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t^\eta}} c \right) \left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\gamma} \right) = \frac{\partial c_{\alpha\beta\gamma}}{\partial t^\eta}.$$

Следовательно, согласно теореме 3.1

$$\frac{\partial c_{\alpha\beta\gamma}}{\partial t^\eta} = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t^\eta}} c \right) \left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\gamma} \right) = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t^\eta}} c \right) \left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\eta} \right) = \frac{\partial c_{\alpha\beta\eta}}{\partial t^\gamma}.$$

Поэтому согласно лемме Пуанкаре в области $x_0 \in U' \subset U$ существует функция $\tilde{b}_{\alpha\beta}$ такая, что $c_{\alpha\beta\gamma} = \partial \tilde{b}_{\alpha\beta} / \partial t^\gamma$. Положим $b_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\tilde{b}_{\alpha\beta} + \tilde{b}_{\beta\alpha})$. Тогда $\partial b_{\alpha\beta} / \partial t^\gamma = \frac{1}{2}(c_{\alpha\beta\gamma} + c_{\beta\alpha\gamma}) = c_{\alpha\beta\gamma}$ и $\partial b_{\alpha\beta} / \partial t^\gamma = c_{\alpha\beta\gamma} = c_{\alpha\gamma\beta} = \partial b_{\alpha\gamma} / \partial t^\beta$. Таким образом, согласно лемме Пуанкаре в области $x_0 \in U'' \subset U'$ существует функция a_α такая, что $b_{\alpha\beta} = \partial a_\alpha / \partial t^\beta$. Следовательно, $\partial a_\alpha / \partial t^\beta = b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha} = \partial a_\beta / \partial t^\alpha$, и согласно лемме Пуанкаре в некоторой области $x_0 \in \tilde{U} \subset U''$ существует функция F такая, что $a_\alpha = \partial F / \partial t^\alpha$. Но тогда

$$c_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma}.$$

□

Задача 6.1. Если структура Дубровина диагонализуема, то $\nabla(\nabla E) = 0$.

7. УРАВНЕНИЯ WDVV

В этом разделе мы заканчиваем доказательство теоремы дубровина об эквивалентности его дифференциально-геометрических структур и решений WDVV уравнений.

Определение 7.1. Пусть на области $U \subset \mathbb{K}^n = \{(t^1, \dots, t^n)\}$ задана функцией $F(t^1, \dots, t^n)$ и векторное поле $E = \sum_\alpha (d_\alpha t^\alpha + r_\alpha) (\partial / \partial t^\alpha)$ такое, что $d_\alpha + d_{n+1-\alpha} = m + 2$, $d_\alpha \cdot r_\alpha = 0$, $d_\epsilon = 1$. Говорят, что пара (F, E) удовлетворяет уравнениям WDVV, если:

1)

$$\sum_{\eta=1}^n \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\eta} \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial t^\gamma \partial t^\delta \partial t^{n+1-\eta}} = \sum_{\eta=1}^n \frac{\partial^3 F}{\partial t^\gamma \partial t^\beta \partial t^\eta} \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\delta \partial t^{n+1-\eta}}$$

(уравнение ассоциативности);

2)

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t^\epsilon \partial t^\alpha \partial t^\beta} = \delta_{\alpha+\beta, n+1}$$

(условие нормализации);

3)

$$L_E F = (m+3)F + \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta + \sum_{\alpha} B_\alpha t^\alpha + C,$$

где $A_{\alpha\beta}, B_\alpha, C = \text{const}$ (уравнения однородности).

Эти уравнения появились в работах Witten, Duijckgraaf, E.Verlinde и H.Verlinde для описания пространств модулей топологических теорий поля.

Теорема 7.1. Пусть M — многообразие со структурой Дубровина и (t^1, \dots, t^n) — плоские квазиоднородные координаты на $U \subset M$. Пусть

$$E = \sum_{\alpha=1}^n (d_\alpha t^\alpha + r_\alpha) \frac{\partial}{\partial t^\alpha}$$

— эйлерово поле и $F(t^1, \dots, t^n)$ — его потенциал. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t^\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\beta} = \sum_{\gamma} \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^{n+1-\gamma}} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\gamma}$$

и (F, E) удовлетворяет уравнениям $WDVV$.

Proof. Положим $c_{\alpha\beta\gamma} = \partial^3 F / \partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma$ и $c = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} c_{\alpha\beta\gamma} dt^\alpha \otimes dt^\beta \otimes dt^\gamma$. Тогда, согласно лемме 1.1,

$$\frac{\partial}{\partial t^\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\beta} = g^{-1} c \left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}, \frac{\partial}{\partial t^\beta} \right) = \sum_{\gamma\eta} g^{\gamma\eta} c_{\alpha\beta\eta} \frac{\partial}{\partial t^\gamma},$$

где $(g^{\gamma\eta}) = (g_{\gamma\eta})^{-1} = (\delta_{\gamma+\eta, n+1})^{-1} = (\delta_{\gamma+\eta, n+1})$. Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial t^\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\beta} = \sum_{\gamma} c_{\alpha\beta n+1-\gamma} \frac{\partial}{\partial t^\gamma} = \sum_{\gamma} \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^{n+1-\gamma}} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\gamma}$$

и

$$\begin{aligned} & \sum_{\delta=1}^n \sum_{\eta=1}^n \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\eta} \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial t^\gamma \partial t^\delta \partial t^{n+1-\eta}} \cdot \frac{\partial}{\partial t^{n+1-\delta}} = \\ & = \sum_{\eta=1}^n \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\eta} \left(\frac{\partial}{\partial t^{n+1-\eta}} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\gamma} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\beta} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial t^\gamma} = \\ & = \frac{\partial}{\partial t^\alpha} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t^\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\gamma} \right) = \frac{\partial}{\partial t^\alpha} \cdot \left(\sum_{\eta} \frac{\partial^3 F}{\partial t^\beta \partial t^\gamma \partial t^\eta} \cdot \frac{\partial}{\partial t^{n+1-\eta}} \right) = \\ & = \sum_{\eta} \sum_{\delta} \frac{\partial^3 F}{\partial t^\beta \partial t^\gamma \partial t^\eta} \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^{n+1-\eta} \partial t^\delta} \cdot \frac{\partial}{\partial t^{n+1-\delta}}. \end{aligned}$$

По определению

$$\delta_{\alpha+\beta, n+1} = g \left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}, \frac{\partial}{\partial t^\beta} \right) = \theta \left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\beta} \right) = \theta \left(\frac{\partial}{\partial t^\epsilon} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\beta} \right) = \frac{\partial^3 F}{\partial t^\epsilon \partial t^\alpha \partial t^\beta}.$$

Рассмотрим $L_E F = \sum_{\eta} (d_\eta t^\eta + r_\eta) (\partial F / \partial t^\eta)$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 (L_E F)}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma} &= \sum_{\eta} (d_\eta t^\eta + r_\eta) \frac{\partial^4 F}{\partial t^\eta \partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma} + (d_\alpha + d_\beta + d_\gamma) \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma} = \\ &= L_E c_{\alpha\beta\gamma} + (d_\alpha + d_\beta + d_\gamma) c_{\alpha\beta\gamma}. \end{aligned}$$

Согласно лемме 5.1, $L_E c = (m+3)c$, откуда

$$L_E c_{\alpha\beta\gamma} = (m+3)c_{\alpha\beta\gamma} - (d_\alpha + d_\beta + d_\gamma)c_{\alpha\beta\gamma}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^3 L_E F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma} = (m+3) \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma}$$

и, значит,

$$L_E F = (m+3)F + \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta + \sum_{\alpha} B_{\alpha} t^\alpha + C,$$

где $A_{\alpha\beta}, b_{\alpha}, C = \text{const}$. □

Теорема 7.2. Пусть (F, E) – решение уравнений WDVV на

$$\tilde{U} = \{(t^1, \dots, t^n)\} \subset \mathbb{K}^n.$$

Положим

$$\frac{\partial}{\partial t^\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\beta} = \sum_{\eta} \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^{n+1-\eta}} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\eta}$$

и

$$g\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}, \frac{\partial}{\partial t^\beta}\right) = \delta_{\alpha+\beta, n+1}.$$

Тогда эти операции задают на $T_t \tilde{U}$ ($t \in \tilde{U}$) структуру алгебры Фробениуса. Пусть $U \subset \tilde{U}$ – подмножество $t \in \tilde{U}$ таких, что алгебра $T_t \tilde{U}$ полупроста. Тогда (\cdot) и g порождают структуру Дубровина с плоскими квазиоднородными координатами (t^1, \dots, t^n) , потенциалом F , эйлеровым полем E и полем единиц $e = \partial/\partial t^\epsilon$.

Proof. Пусть $t \in \tilde{U}$. Операция (\cdot) порождает на $T_t U$ структуру коммутативной алгебры. Ее ассоциативность следует из уравнения ассоциативности. Кроме того,

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\beta}, \frac{\partial}{\partial t^\gamma}\right) &= \sum_{\eta} \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^{n+1-\eta}} g\left(\frac{\partial}{\partial t^\eta}, \frac{\partial}{\partial t^\gamma}\right) = \\ &= \sum_{\eta} \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^{n+1-\eta}} \delta_{\eta+\gamma, n+1} = \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma} = g\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}, \frac{\partial}{\partial t^\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\gamma}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, $T_t \tilde{U}$ является фробениусовой алгеброй.

Положим

$$c_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma}, \quad c = \sum c_{\alpha\beta\gamma} dt^\alpha \otimes dt^\beta \otimes dt^\gamma$$

и $\gamma = \nabla c$. Координаты (t^α, \dots, t^n) являются плоскими в метрике g и, следовательно,

$$\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}, \frac{\partial}{\partial t^\beta}, \frac{\partial}{\partial t^\gamma}, \frac{\partial}{\partial t^\eta}\right) = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t^\eta}} c\right)\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}, \frac{\partial}{\partial t^\beta}, \frac{\partial}{\partial t^\gamma}\right) = \frac{\partial}{\partial t^\eta} c_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial^4 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma \partial t^\eta}.$$

Таким образом, тензор γ симметричен относительно всех 4 переменных и согласно теореме 3.1 операции (\cdot) и g задают на U фробениусову структуру. Ее поле единиц совпадает с $e = \partial/\partial t^\epsilon$, поскольку

$$\frac{\partial}{\partial t^\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\epsilon} = \sum_{\eta} \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\epsilon \partial t^{n+1-\eta}} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\eta} = \sum_{\eta} \delta_{\alpha+n+1-\eta, n+1} \frac{\partial}{\partial t^\eta} = \frac{\partial}{\partial t^\alpha}$$

Таким образом, $\nabla e = \nabla(\partial/\partial t^\epsilon) = 0$. Осталось доказать, что существуют канонические координаты (x^1, \dots, x^n) такие, что $E = \sum_{i=1}^n x^i(\partial/\partial x^i)$ и $L_E \mu_i = m \mu_i$ для $g = \sum_{i=1}^n \mu_i dx^i \otimes x^i$. Согласно уравнению однородности,

$$L_E F = (m+3)F + \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta + \sum_{\alpha} B_{\alpha} t^\alpha + C.$$

Следовательно,

$$L_E c = \sum (L_E c)_{\alpha\beta\gamma} dt^\alpha \otimes dt^\beta \otimes dt^\gamma,$$

где

$$\begin{aligned} (L_E c)_{\alpha\beta\gamma} &= \sum_{\delta} (d_\delta t^\delta + r_\alpha) \frac{\partial^4 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma \partial t^\delta} + (d_\alpha + d_\beta + d_\gamma) \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma} = \\ &= \frac{\partial^3 (L_E F)}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma} = (m+3)c_{\alpha\beta\gamma}, \end{aligned}$$

то есть $L_E c = (m+3)c$.

Рассмотрим теперь тензор $g^{-1} = \sum_{\alpha\beta} \delta^{\alpha+\beta, n+1} \partial t^\alpha \otimes \partial t^\beta$. Тогда

$$L_E g^{-1} = \left(\sum_{\alpha\beta} L_E g \right)^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial t^\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial t^\beta},$$

где

$$(L_E g)^{\alpha\beta} = -(d_\alpha + d_\beta)g^{\alpha\beta} = -\delta^{\alpha+\beta, n+1}(d_\alpha + d_\beta) = -(m+2)g^{\alpha\beta}.$$

Следовательно, $L_E g^{-1} = -(m+2)g^{-1}$ и

$$L_E(g^{-1}c) = L_E(g^{-1})c + g^{-1}L_E(c) = [-(m+2) + (m+3)]g^{-1}c = g^{-1}c.$$

Кроме того, согласно лемме 2.1, $a \cdot b = g^{-1}c(a \otimes b)$ и

$$\begin{aligned} L_E(a \cdot b) &= L_E(g^{-1}c(a \otimes b)) = L_E(g^{-1}c)(a \otimes b) + g^{-1}c(L_E(a \otimes b)) = \\ &= g^{-1}c(a \otimes b) + g^{-1}c(L_E a \otimes b) + g^{-1}c(a \otimes L_E b) = a \cdot b + L_E a \cdot b + a \cdot L_E b. \end{aligned}$$

Пусть теперь x^1, \dots, x^n — канонические координаты и $\partial_i = \partial/\partial x^i$. Тогда

$$L_E(\partial_i) = L_E(\partial_i \cdot \partial_i) = \partial_i \cdot \partial_i + 2L_E(\partial_i) \cdot \partial_i$$

и, следовательно, $L_E(\partial_i) \cdot \partial_i = \partial_i + 2L_E(\partial_i) \cdot \partial_i$. Таким образом, $L_E(\partial_i) \cdot \partial_i = -\partial_i$ и $L_E(\partial_i) = \partial_i \cdot \partial_i - 2\partial_i = -\partial_i$. Но

$$L_{(\sum_{i=1}^k x^i \partial_i)}(\partial_i) = -\partial_i.$$

Следовательно,

$$L_E = L_{\sum x^i \partial_i}$$

и

$$E = \sum (x^i + q_i) \frac{\partial}{\partial (x^i + q_i)},$$

где $q_i = \text{const}$. В частности,

$$\begin{aligned} L_{(\sum_i (x^i + q_i) \partial_i)} g &= L_E g = L_{(\sum_i (d_i t^i + r_\alpha) \frac{\partial}{\partial t^i})} \left(\sum_{\alpha, \beta} \delta^{\alpha+\beta, n+1} dt^\alpha \otimes dt^\beta \right) = \\ &= \sum_{\alpha, \beta} (d_\alpha + d_\beta) \delta^{\alpha+\beta, n+1} dt^\alpha \otimes dt^\beta = (m+2)g. \end{aligned}$$

Для $g = \sum \mu_i dx^i \otimes dx^i$ это условие эквивалентно $L_E \mu_i = m \mu_i$. Таким образом, координаты $(x^i + q_i)$ являются однородными. \square

Теоремы 7.1 и 7.2 означают, что структура Дубровина — это почти то же самое, что решение уравнений WDVV, порождающее полупростые алгебры.

8. ПРОСТЕЙШИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ WDVV

Пусть F — решение WDVV в связной области $M \subset \mathbb{K}^n$. Рассмотрим структуру Дубровина $\{(M_x, \theta_x) | x \in M\}$, которую оно определяет. Тогда $\nabla e = \nabla(\theta) = 0$ и, значит, $\nabla(\theta(e)) = 0$, т.е. $\theta(e) = \text{const}$.

Задача 8.1. Доказать, что $\theta(e) \neq 0$, то $m = 0$.

В приложениях обычно $\theta(e) = 0$, поэтому далее, если не оговорено противное, мы считаем, что $\theta(e) = 0$.

Пусть (t^1, \dots, t^n) — плоские квазиоднородные координаты и $e = \partial/\partial t^\epsilon$. Тогда

$$\delta_{n+1-\epsilon, \epsilon} = g\left(\frac{\partial}{\partial t^\epsilon}, \frac{\partial}{\partial t^\epsilon}\right) = \theta(e) = 0$$

и, следовательно, $n + 1 - \epsilon \neq \epsilon$. Таким образом, существует перенумерация t^i такая, что $\epsilon = 1$ и $e = \partial/\partial t^1$. В этом случае условие нормировки $\partial^3 F/\partial t^1 \partial t^\alpha \partial t^\beta = \delta_{\alpha+\beta, n+1}$ дает

$$F(t^1, \dots, t^n) = \frac{1}{2}(t^1)^2 t^n + \frac{1}{2} t^1 \sum_{\alpha=2}^{n-1} t^\alpha t^{n+1-\alpha} + f(t^2, \dots, t^n).$$

Задача 8.2. Доказать, что если $\theta(e) \neq 0$, то существует перенумерация t^i такая, что

$$F = c(t^1)^3 + \frac{1}{2} t^1 \sum_{\alpha=2}^n t^\alpha t^{n+2-\alpha} + f(t^2, \dots, t^n).$$

РАССМОТРИМ СЛУЧАЙ $n = 2$. Тогда $F(t^1, t^2) = (t^1)^2 t^2/2 + f(t^2)$.

Теорема 8.1. Существует ровно 5 структур Дубровина размерности 2 с $\theta(e) = 0$. Они определяются парами (F, E) :

$$1) F(t^1, t^2) = \frac{1}{2}(t^1)^2 t^2 + a(t^2)^{(m+3)/(m+1)} + \alpha(t^2)^2 + \beta t^2 + \gamma,$$

$$E = t^1 \frac{\partial}{\partial t^1} + (m+1)t^2 \frac{\partial}{\partial t^2} \quad (m \neq -1, 1, 3);$$

$$2) F(t^1, t^2) = \frac{1}{2}(t^1)^2 t^2 + c \ln t^2 + \alpha(t^2)^2 + \beta t^2 + \gamma,$$

$$E = t^1 \frac{\partial}{\partial t^1} - 2t^2 \frac{\partial}{\partial t^2};$$

$$3) F(t^1, t^2) = \frac{1}{2}(t^1)^2 t^2 + c(t^2)^2 \ln t^2 + \alpha(t^2)^2 + \beta t^2 + \gamma,$$

$$E = t^1 \frac{\partial}{\partial t^1} + 2t^2 \frac{\partial}{\partial t^2};$$

$$4) F(t^1, t^2) = \frac{1}{2}(t^1)^2 t^2 + e^{\frac{2}{r} t^2} + \alpha(t^2)^2 + \beta t^2 + \gamma,$$

$$E = t^1 \frac{\partial}{\partial t^1} + r \frac{\partial}{\partial t^2};$$

$$5) F(t^1, t^2) = \frac{1}{2}(t^1)^2 t^2 + \alpha(t^2)^2 + \beta t^2 + \gamma,$$

$$E = t^1 \frac{\partial}{\partial t^1}.$$

Proof. Уравнение ассоциативности дает только одно уравнение

$$\sum_{\eta=1,2} \frac{\partial^3 F}{\partial t^1 \partial t^1 \partial t^\eta} \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial t^2 \partial t^2 \partial t^{n+1-\eta}} = \sum_{\eta=1,2} \frac{\partial^3 F}{\partial t^2 \partial t^1 \partial t^\eta} \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial t^1 \partial t^2 \partial t^{n+1-\eta}},$$

которое всегда выполнено. Осталось удовлетворить уравнению однородности. Рассмотрим два случая: 1) $m \neq -1$ и 2) $m = -1$.

Случай 1. Пусть $m \neq -1$. Тогда $d_1 = 1, d_2 = m + 2 - d_1 = m + 1 \neq 0$, и

$$E = t^1 \frac{\partial}{\partial t^1} + (m + 1)t^2 \frac{\partial}{\partial t^2}.$$

Уравнение однородности дает

$$(m + 3)\left(\frac{1}{2}(t^1)^2 t^2 + f(t^2)\right) + \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta + \sum_{\alpha} B_{\alpha} t^\alpha + C =$$

$$L_{(t^1 \frac{\partial}{\partial t^1} + (m+1)t^2 \frac{\partial}{\partial t^2})}\left(\frac{1}{2}(t^1)^2 t^2 + f(t^2)\right) = (t^1)^2 t^2 + \frac{1}{2}(m + 1)(t^1)^2 t^2 + (m + 1)t^2 f'(t^2).$$

Следовательно,

$$(m + 1)t^2 f'(t^2) - (m + 3)f(t^2) = \sum_{\alpha\beta=1,2} A_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta + \sum_{\alpha} B_{\alpha} t^\alpha + C.$$

Таким образом, мы должны найти все решения уравнения

$$(m + 1)x f'(x) - (m + 3)f(x) = ax^2 + bx + c$$

для всех $a, b, c = \text{const}$.

а) Если $m = -3$, то $-2x f'(x) = ax^2 + bx + c$ и $f(x) = c \ln x + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

б) Если $m = 1$, то $2x f'(x) - 4f(x) = ax^2 + bx + c$ и $f(x) = cx^2 \ln x + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

в) Если $m \neq -3, 1$, то $f(x) = ax^{\frac{m+3}{m+1}} + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Случай 2. Пусть $m = -1$. Тогда $d_2 = (m + 2) - d_1 = 0$ и $E = t^1(\partial/\partial t^1) + r(\partial/\partial t^2)$.

Таким образом, уравнение однородности дает

$$2\left(\frac{1}{2}(t^1)^2 t^2 + f(t^2)\right) + \sum_{\alpha\beta=1,2} A_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta + \sum_{\alpha=1,2} B_{\alpha} t^\alpha + C =$$

$$L_{(t^1 \frac{\partial}{\partial t^1} + r \frac{\partial}{\partial t^2})}\left(\frac{1}{2}(t^1)^2 t^2 + f(t^2)\right) = (t^1)^2 t^2 + \frac{r}{2}(t^1)^2 + r f'(t^2).$$

Следовательно, мы имеем уравнение

$$r f'(t^2) - 2f(t^2) = \sum_{\alpha\beta=1,2} A_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta + \sum_{\alpha=1,2} B_{\alpha} t^\alpha + C - \frac{r}{2}(t^1)^2,$$

то есть $r f'(x) - 2f(x) = \alpha x^2 + \beta x + c$. Если $r = 0$, то $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + c$. Если $r \neq 0$, то $f(x) = e^{\frac{2}{r}x} + \alpha x^2 + \beta x + c$. \square

Задача 8.3. Сформулировать и доказать аналогичную теорему для случая $\theta(e) \neq 0$.

РАССМОТРИМ ТЕПЕРЬ СЛУЧАЙ $n = 3$. Тогда

$$F(t^1, t^2, t^3) = \frac{1}{2}(t^1)^2 t^3 + \frac{1}{2}(t^1)(t^2)^2 + f(t^2, t^3).$$

В приложениях особенно важны полиномиальные решения.

Теорема 8.2. Существует ровно 3 типа структур Дубровина размерности 3 с полиномиальным потенциалом, с $\theta(e) = 0$ и с показателями $d_i \neq 0$. Они определяются парами (F, E) :

$$1) f = \frac{(t^1)^2 t^3 + t^1 (t^2)^2}{2} + a(t^2)^2 (t^3)^2 + \frac{16}{60} a^2 (t^3)^5,$$

$$E = t^1 \frac{\partial}{\partial t^1} + \frac{3}{4} t^2 \frac{\partial}{\partial t^2} + \frac{1}{2} t^3 \frac{\partial}{\partial t^3};$$

$$2) f = \frac{(t^1)^2 t^3 + t^1 (t^2)^2}{2} + a(t^2)^3 t^3 + 6a^2 (t^2)^2 (t^3)^3 + \frac{1296}{210} a^4 (t^3)^7,$$

$$E = t^1 \frac{\partial}{\partial t^1} + \frac{2}{3} t^2 \frac{\partial}{\partial t^2} + \frac{1}{3} t^3 \frac{\partial}{\partial t^3};$$

$$3) f = \frac{(t^1)^2 t^3 + t^1 (t^2)^2}{2} + a(t^2)^3 (t^3)^2 + \frac{36}{20} a^2 (t^2)^2 (t^3)^5 + \frac{1296}{3960} a^4 (t^3)^{11},$$

$$E = t^1 \frac{\partial}{\partial t^1} + \frac{3}{5} t^2 \frac{\partial}{\partial t^2} + \frac{1}{5} t^3 \frac{\partial}{\partial t^3}.$$

Proof. Ввиду $d_2, d_3 \neq 0$ и $2d_2 = d_3 + 1 = m + 2$ мы имеем

$$E = t^1 \frac{\partial}{\partial t^1} + \frac{m+2}{2} t^2 \frac{\partial}{\partial t^2} + (m+1) t^3 \frac{\partial}{\partial t^3},$$

где $m \neq -1, -2$.

Уравнения ассоциативности дают только одно нетривиальное уравнение

$$\sum_{\eta=1}^3 \frac{\partial^3 F}{\partial t^2 \partial t^3 \partial t^\eta} \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial t^3 \partial t^2 \partial t^{n+1-\eta}} = \sum_{\eta=1}^3 \frac{\partial^3 F}{\partial t^3 \partial t^3 \partial t^\eta} \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial t^2 \partial t^2 \partial t^{n+1-\eta}},$$

которое эквивалентно

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial t^2 \partial t^3} \right)^2 = \frac{\partial^3 f}{\partial t^3 \partial t^3 \partial t^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial t^2 \partial t^2} \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial t^3 \partial t^3}.$$

Положим $x = t^2$, $y = t^3$, тогда $f_{xxy}^2 = f_{yyy} + f_{xxx} f_{xyy}$.

Уравнение однородности $L_E F = (m+3)F + P$ дает

$$\frac{m+2}{2} x f_x + (m+1) y f_y = (m+3) f + \varphi(x, y),$$

где $\varphi(x, y)$ — квадратичная форма от x, y . (Можно доказать, что это уравнение эквивалентно уравнению Пенлеве VI.)

Пусть теперь $f(x, y) = \sum a_{pq} x^p y^q$. Тогда условие однородности дает

$$\frac{m+2}{2} x \sum p a_{pq} x^{p-1} y^q + (m+1) y \sum q a_{pq} x^p y^{q-1} = (m+3) \sum a_{pq} x^p y^q + \varphi$$

и, следовательно, $\frac{m+2}{2}pa_{pq} + (m+1)qa_{pq} = (m+3)a_{pq}$, откуда

$$m = -2 \frac{p+q-3}{p+2q-2}.$$

В месте с ограничениями $p+q > 2$, $d_i > 0$ это дает представление числа m в одном из следующих двух видах.

$$1)m = (2s-n)/(n-s), \quad s, n \in \mathbb{Z} \geq 0, n \equiv 1 \pmod{2}.$$

$$2)m = (2s-2n)/(2n-s), \quad s, n \in \mathbb{Z} \geq 0, n \equiv 1 \pmod{2}.$$

Случай 1. Пусть $m = (2s-n)/(n-s)$. Тогда

$$q = \frac{m+3}{m+1} - \frac{m+2}{2m+2}p = \frac{\frac{2s-n}{n-s} + 3}{\frac{2s-n}{n-s} + 1} - \frac{\frac{2s-n}{n-s} + 2}{2\frac{2s-n}{n-s} + 2} = \frac{2n-s}{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{s}p$$

и, следовательно,

$$q+1 = 2\frac{n}{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{s}p.$$

Положим $k = (q+1)/n$. Тогда $q = kn - 1$ и $p = 4 - 2ks$. Следовательно,

$$f(x, y) = \sum_k a_k x^{4-2ks} y^{kn-1}.$$

Условия $m \neq -1$, $kn - 1 \geq 0$ и $4 - 2ks \geq 0$ дают $s > 0, k > 0, s \leq 2$. Таким образом, имеются только 2 возможности:

$$s = 1, \quad f(x, y) = a_1 x^2 y^{n-1} - a_2 y^{2n-1} \quad \text{и} \quad s = 2, \quad f = a_1 y^{n-1}.$$

Случай 2. Пусть

$$m = \frac{2(s-n)}{2n-s}.$$

Тогда

$$q = \frac{m+3}{m+1} - \frac{m+2}{2m+2}p = \frac{\frac{2(s-n)}{n-s} + 3}{\frac{2(s-n)}{n-s} + 1} - \frac{1}{2} \frac{\frac{2(s-n)}{n-s} + 2}{\frac{2(s-n)}{2n-s} + 1} = \frac{4n-s}{s} - \frac{n}{s}p$$

и, следовательно,

$$q+1 = \frac{4n}{s} - \frac{n}{s}p.$$

Положим $k = (q+1)/n$. Тогда $q = kn - 1$ и $p = 4 - ks$. Таким образом,

$$f(x, y) = \sum_k a_k x^{4-ks} y^{kn-1}.$$

Условия $m \neq -1$, $4 - ks \geq 0$ и $kn \geq 0$ дают $n > 0, 4 \leq k > 0, s = 1, 3$.

Если $s = 3$, то $f = a_1 xy^{n-1}$, если $s = 1$, то

$$f = a_1 x^3 y^{n-1} + a_2 x^2 y^{2n-1} + a_3 x y^{3n-1} + a_4 y^{4n-1}.$$

Таким образом, условия однородности дают 4 типа полиномов:

$$f = a_1 y^{n-1} + \varphi, \quad n \equiv 1 \pmod{2};$$

$$f = a_1 xy^{n-1} + \varphi;$$

$$f = a_1 x^2 y^{n-1} + a_2 y^{2n-1} + \varphi, \quad n \equiv 1 \pmod{2};$$

$$f = a_1 x^3 y^{n-1} + a_2 x^2 y^{2n-1} + a_3 x y^{3n-1} = a_4 y^{4n-1} + \varphi$$

(φ — квадратичная форма).

Используем теперь условия ассоциативности. Тогда 1) и 2) дают $f_{yyy} = 0$ и, следовательно, $a_1 = 0$. Тип 3) дает

$$\begin{aligned} (2a_1(n-1)y^{n-2})^2 &= ((a_1 x^2 y^{n-1} + a_2 y^{2n-1})_{xxy})^2 = (a_1 x^2 y^{n-1} + a_2 y^{2n-1})_{yyy} = \\ &= a_1(n-1)(n-2)(n-3)x^2 y^{n-4} + a_2(2n-1)(2n-2)(2n-3)y^{2n-4}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$n = 3, m = \frac{2s-n}{n-s} = -\frac{1}{2} \text{ и } a_2 = \frac{16}{20} a_1^2.$$

Таким образом,

$$F = \frac{(t^1)^2 t^3 + t^1 (t^2)^2}{2} + a(t^2)^2 (t^3)^2 + \frac{16}{60} a^2 (t^3)^5.$$

Задача 8.4. Доказать, что если $a = 1/4$, то F является потенциалом для M_3 из примера 2.2.

Задача 8.5. Доказать, что если тип 4 дает решения

$$m = -\frac{2}{3}, \quad F = \frac{(t^1)^2 t^3 + t^1 (t^2)^2}{2} + a(t^2)^3 t^3 + 6a^2 (t^2)^2 (t^3)^3 + \frac{1296}{210} a^4 (t^3)^7,$$

$$m = -\frac{4}{5}, \quad F = \frac{(t^1)^2 t^3 + t^1 (t^2)^2}{2} + a(t^2)^3 (t^3)^2 + \frac{36}{20} a^2 (t^2)^2 (t^3)^5 + \frac{1296}{3960} a^4 (t^3)^{11}.$$

Это завершает доказательство теоремы. \square

В параграфе 12 мы докажем, что эти решения являются потенциалом структур Дубровина на пространстве орбит кокстеровских групп A_3, B_3 и H_3 .

9. АНАЛИТИЧЕСКИЕ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ WDVV

Перейдем теперь к описанию аналитических решений уравнения WDVV, то есть решений с потенциалом вида

$$F(t^1, \dots, t^n) = \sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n a_{i_1, \dots, i_m} t^1, \dots, t^m,$$

где, для однозначности функции, коэффициенты a_{i_1, \dots, i_m} инвариантны относительно любой перестановки индексов. Уравнения WDVV превращаются при этом в соотношения на коэффициенты a_{i_1, \dots, i_m} .

Условие нормализации означает, что коэффициенты $a_{\epsilon, i_1, \dots, i_m}$ равны 0 при $m > 2$ и $a_{\epsilon, \alpha, \alpha} = \delta_{2\alpha, n+1}$ и $a_{\epsilon, \alpha, \beta} = \frac{1}{2} \delta_{\alpha+\beta, n+1}$ при $\alpha \neq \beta$.

Условие однородности также очевидным образом переписывается в соотношения между коэффициентами. Если все $d_\alpha \neq 0$ оно означает, например, что $a_{i_1, \dots, i_m} = 0$, если $\sum_{p=1}^m d_p l_p \neq (m+1)$, где $l_p = |\{j | i_j = p\}|$.

Опишем теперь условия на коэффициенты, эквивалентные уравнениям ассоциативности.

Рассмотрим в векторном пространстве с координатами (t^1, \dots, t^n) невырожденную симметричную матрицу $\{\eta^{\lambda\mu}\}$. Для описания решений удобно использовать *системы корреляторов*, то есть наборы чисел $\langle i_1, \dots, i_m \rangle$, инвариантные относительно перестановки индексов и удовлетворяющих условию *когерентности*

$$\sum_{\sigma \in S_n} \sum_{k=0}^m \sum_{\lambda, \mu=0}^n \langle \alpha, \beta, i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(k)}, \lambda \rangle \eta^{\lambda\mu} \langle \mu, \gamma, \delta, i_{\sigma(k+1)}, \dots, i_{\sigma(m)} \rangle =$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \sum_{k=0}^m \sum_{\lambda, \mu=0}^n \langle \beta, \gamma, i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(k)}, \lambda \rangle \eta^{\lambda\mu} \langle \mu, \delta, \alpha, i_{\sigma(k+1)}, \dots, i_{\sigma(m)} \rangle .$$

для любых $\alpha, \beta, \gamma, \delta, i_1, \dots, i_m$

Теорема 9.1. *Функция F удовлетворяет уравнению ассоциативности если и только если набор чисел*

$$\langle i_1, \dots, i_k \rangle = \frac{1}{(m-3)!} a_{i_1, \dots, i_k}$$

образует систему корреляторов.

Proof. Прямое вычисление дает

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{i_1, \dots, i_m} a_{\alpha, \beta, i_1, \dots, i_m} t^{i_1} \dots t^{i_m} =$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \langle \alpha, \beta, \gamma, i_1, \dots, i_m \rangle t^{i_1} \dots t^{i_m}$$

Откуда

$$\sum_{\lambda, \mu=0}^n \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\lambda} \eta^{t^{\lambda\mu}} \sum_{\lambda, \mu=0}^n \frac{\partial^3 F}{\partial t^\mu \partial t^\gamma \partial t^\delta} =$$

$$\sum_{k, l=0}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^n \sum_{\lambda, \mu} \langle \alpha, \beta, \lambda, i_1, \dots, i_k \rangle \eta^{\lambda\mu} \langle \gamma, \delta, \mu, j_1, \dots, j_l \rangle t^{i_1} \dots t^{i_k} t^{j_1} \dots t^{j_l}$$

Уравнение ассоциативности означает, что левая часть равенства не изменится, если поменять местами α и λ . Аксиома корреляторов означает, что правая часть равенства не изменится, если поменять местами α и λ . \square

Бескоординатное описание системы корреляторов делается с помощью циклической $Comt_\infty$ -алгебры. Структура циклической $Comt_\infty$ -алгебры на векторном пространстве с невырожденной метрикой (H, η) называется последовательность отображений $\circ_n : H^{\otimes n} \rightarrow H, n = 2, 3, \dots$, (обозначаемых $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \circ_n(\gamma_1 \otimes \dots \otimes \gamma_n)$ со следующими свойствами.

а) (*циклическость*)

$$\eta((\gamma_{\sigma(1)}, \dots, \gamma_{\sigma(n)}, \gamma_{\sigma(n+1)}) = \eta((\gamma_1, \dots, \gamma_n), \gamma_{n+1})$$

для всех перестановок $\sigma \in S_{n+1}$;

б) (ассоциативность)

$$\sum_{\{i_1, \dots, i_k\} \cup \{j_1, \dots, j_l\} = \{1, \dots, m\}} ((\alpha, \beta, \delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_k}), \gamma, \delta_{j_1}, \dots, \delta_{j_l}) =$$

$$\sum_{\{i_1, \dots, i_k\} \cup \{j_1, \dots, j_l\} = \{1, \dots, m\}} (((\beta, \gamma, \delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_k}), \alpha, \delta_{j_1}, \dots, \delta_{j_l}))$$

для всех $m \geq 0$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta_1, \dots, \delta_m$

Теорема 9.2. Последовательность отображений $\circ_n : H^{\otimes n} \rightarrow H, n = 2, 3, \dots$ образует циклическую Сотт $_{\infty}$ -алгебры на векторном пространстве с невырожденной метрикой (H, η) , если и только если семейство чисел $\langle i_1, \dots, i_k \rangle = \eta((i_1, \dots, i_{k-1}), i_k)$ образует систему корреляторов.

Proof. Зафиксируем в пространстве H базис e_1, \dots, e_r положим $\eta_{ij} = \eta(e_i, e_j)$. Рассмотрим обратную матрицу $\{\eta^{ij}\} = (\{\eta_{ij}\})^{-1}$. Аксиома цикличности дает $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \sum_{i,j=1}^r \eta((\gamma_1, \dots, \gamma_n), e_i) \eta^{ij} e_j = \sum_{i,j=1}^r \langle \gamma_1, \dots, \gamma_n, e_i \rangle \eta^{ij} e_j$. Таким образом

$$((\gamma_1, \dots, \gamma_{n_1}), \gamma_{n_1+1} \dots, \gamma_{n_1+n_2}) = \sum_{i,j=1}^r \langle \gamma_1, \dots, \gamma_{n_1}, e_i \rangle \eta^{ij} (e_j, \gamma_{n_1+1} \dots, \gamma_{n_1+n_2}) =$$

$$\sum_{i,j=1}^r \sum_{i,j=1}^r \langle \gamma_1, \dots, \gamma_{n_1}, e_i \rangle \eta^{ij} \langle e_j, \gamma_{n_1+1} \dots, \gamma_{n_1+n_2} \rangle \eta^{ab} e_b.$$

Поэтому условие ассоциативности эквивалентно условию когерентности. \square

Используем теперь, следуя [9] описание решений уравнений ассоциативности через системы корреляторов для построения решений чисто алгебраического происхождения.

Рассмотрим фробениусову пару (A, θ) и последовательность линейных операторов $f_3, f_4, \dots : A \rightarrow A$, принадлежащих некоторому компактному подмножеству множества $\text{End}(A)$ и таких, что $f(ab) = af(b)$.

Лемма 9.1. Числа $\langle i_1, \dots, i_m \rangle = \eta(e_{i_1} \dots e_{i_{m-1}}, f_m(e_{i_m}))$ образует систему корреляторов, причем

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n \langle i_1, \dots, i_s, \lambda \rangle \eta^{\lambda\mu} \langle i_{s+1}, \dots, i_m, \mu \rangle = \eta(f_s(e_{i_1}, \dots, e_{i_s}), f_{m-s}(e_{i_{s+1}}, \dots, e_{i_m}))$$

. Зафиксируем произвольный базис e^1, \dots, e^n .

Proof. Рассмотрим разложение $f_m(e_{i_1}, \dots, e_{i_{m-1}}) = \sum_{j=1}^n \varphi_{i_1 \dots i_{m-1}}^j e_j$. Тогда

$$\langle i_1, \dots, i_m \rangle = \eta(e_{i_1} \dots e_{i_{m-1}}, f_m(e_{i_m})) = \eta(f_m(e_{i_1} \dots e_{i_{m-1}}), e_{i_m}) = \sum_{j=1}^n \varphi_{i_1 \dots i_{m-1}}^j \eta_{i_m j}.$$

Таким образом,

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n \langle e_{i_1}, \dots, e_{i_s}, \lambda \rangle \eta^{\lambda\mu} \langle e_{i_{s+1}}, \dots, e_{i_m}, \mu \rangle = \sum_{j,k,\mu,\nu=1}^n \varphi_{i_1 \dots i_s}^j \eta_{j\lambda} \varphi_{i_{s+1} \dots i_m}^k \eta_{\mu k} \eta^{\lambda\mu} =$$

$$\sum_{j,k,\mu,\nu=1}^n \varphi_{i_1 \dots i_s}^j \varphi_{i_{s+1} \dots i_m}^k \eta_{jk} = \eta(f_s(e_{i_1}, \dots, e_{i_s}), f_{m-s}(e_{i_{s+1}}, \dots, e_{i_m}))$$

Когерентность следует теперь из соотношения $\eta(ab, f(c)) = \eta(bc, f(a))$. \square

Теорема 9.3. Для любого $a = \sum_{i=1}^n t^i e_i \in A$ ряд

$$F(t) = \sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{m!} \eta(a^{m-1}, f_m(a))$$

абсолютно сходится и определяет голоморфную функцию $F : A \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющую уравнению ассоциативности относительно матрицы η^{ij} .

Proof. Абсолютная сходимость следует из компактности замыкания множества операторов. Уравнение ассоциативности следует из теоремы 9.1 и предыдущей леммы. \square

10. КОГОМОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Обозначим через $M_{0,n}$ пространство модулей римановых сфер с n попарно различными нумерованными точками, то есть $(2n-6)$ -мерное пространство классов биголоморфной эквивалентности таких сфер. Граница $\partial \overline{M}_{0,n} = \overline{M}_{0,n} \setminus M_{0,n}$ его компактификации Делиня-Мамфорда [12] $\overline{M}_{0,n}$ получается стягиванием в точки попарно непересекающихся контуров. (Стягиванием контура в точку называется результат деформации римановой с проколами в отмеченных точках, при которой длина контура в гиперболической метрике стремится к 0)

В итоге получаются деревья, где ребра заменены сферами. Причем отмеченные точки распределены по сферам таким образом, чтобы на каждой сфере их число вместе с числом точек, полученных стягиванием контуров, превосходило 2.

Классы гомеоморфизмов стянутых отмеченных сфер образуют базис гомологий $H_*(\overline{M}_{0,n})$. Причем сферы с t перетяжками порождают группу $H_{2n-6-2m}(\overline{M}_{0,n})$. Соотношения между ними даются теоремой Кила [5]. Определяющие соотношения [12] для $H_{2n-6-2m}(\overline{M}_{0,n})$ строятся по

- 1) произвольной подтянутой сфере $S \in H_{2n-6-2m+2}(\overline{M}_{0,n})$;
- 2) произвольной сфере s из тех на которые перетянутая сфера S , распадается после удаления перетяжек;
- 3) произвольной четверке точек $a_1, a_2, a_3, a_4 \in S$, где a_i — это или отмеченные точки, или точки, порожденные перетяжкой контура.

По этому набору данных мы строим две формальные суммы перетянутых сфер из $H_{2n-6-2m}(\overline{M}_{0,n})$. Одна из них ξ_1 состоит из перетяжек, отделяющих точки a_1, a_2 от a_3, a_4 . Другая ξ_2 состоит из перетяжек, отделяющих точки a_1, a_3 от a_2, a_4 . Разность $\xi_1 - \xi_2$ представляет нулевой элемент гомологий. Группа $H_{2n-6-2m}(\overline{M}_{0,n})$ изоморфна свободной абелевой группе, порожденной всеми перетянутыми сферами из $H_{2n-6-2m}(\overline{M}_{0,n})$, факторизованной по подгруппе, порожденной всеми элементами вида $\xi_1 - \xi_2$.

Гомологические классы из $H_*(\overline{M}_{0,n})$ порождают линейные функционалы на $H^*(\overline{M}_{0,n})$. Обозначим через

$$\int_{\overline{M}_{0,n}} : H^*(\overline{M}_{0,n}) \rightarrow \mathbb{C}$$

функционал, порожденный клеткой $M_{0,n}$.

Любому разбиению σ множества $\{1, \dots, n\}$ на 2 подмножества мощности $n_1, n_2 > 2$ отвечает часть границы $\partial \overline{M}_{0,n}$, состоящая из перетяжек по контурам, реализующим разбиение σ на множестве отмеченных точек. Из описания групп гомологий следует, что разбиение σ порождает гомоморфизм $\varphi_\sigma : H_*(\overline{M}_{0,n_1+1}) \times H_*(\overline{M}_{0,n_2+1}) \rightarrow H_*(\overline{M}_{0,n})$ и, следовательно, гомоморфизм $\varphi_\sigma^* : H^*(\overline{M}_{0,n}) \rightarrow H^*(\overline{M}_{0,n_1+1}) \otimes H^*(\overline{M}_{0,n_2+1})$

Перейдем теперь к определению *когомологической теории поля*. Она (на древесном уровне) состоит из конечномерного векторного пространства с невырожденной билинейной формой (H, η) (обозначим через η^{ij} матрицу, обратную к матрице грамма $\eta_{ij} = \eta(e_i, e_j)$ в базисе $\{e_1, \dots, e_n\} \in H$) и семейства линейных отображений

$$I_n : H^{\otimes n} \rightarrow H^*(\overline{M}_{0,n}), \quad n = 3, 4, \dots,$$

инвариантных относительно действия группы S_n и удовлетворяющих условию *расщепляемости*

$$\varphi_\sigma^*(I_n(\gamma_1 \otimes \dots \otimes \gamma_n)) = \sum_{i,j=1}^n I_{|S_1|}(\bigotimes_{p \in S_1} \gamma_p \otimes e_i) \eta^{ij} I_{|S_2|}(e_j \otimes \bigotimes_{q \in S_2} \gamma_q)$$

для любого разбиения $S_1 \amalg S_2 = \{1, \dots, n\}$, где $|S_i| > 2$.

Теорема 10.1. *Равенство $\langle e_{i_1}, \dots, e_{i_n} \rangle = \int_{\overline{M}_{0,n}} I_n(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n})$ задает биекцию между системами корреляторов и когомологическими теориями поля.*

Proof. Докажем, что когомологическая теория поля $\{I_n : H^{\otimes n} \rightarrow H^*(\overline{M}_{0,n}), n = 3, 4, \dots\}$ порождает систему корреляторов $\langle e_{i_1}, \dots, e_{i_n} \rangle = \int_{\overline{M}_{0,n}} I_n(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n})$. Сопоставим произвольной четверке

точек $a_1, a_2, a_3, a_4 \in S$ две формальные суммы перетянутых сфер из $H_{2n-8}(\overline{M}_{0,n})$. Слагаемые одной из них $\xi_1(a_1, a_2, a_3, a_4)$ образуют множество $\{\Sigma_1\}$, состоящее из перетяжек, отвечающих разбиениям, отделяющих точки a_1, a_2 от a_3, a_4 . Слагаемые другой $\xi_2(a_1, a_2, a_3, a_4)$ образуют множество $\{\Sigma_2\}$, состоящее из перетяжек, отвечающих разбиениям, отделяющих точки a_1, a_3 от a_2, a_4 . Разность $\xi_1(a_1, a_2, a_3, a_4) - \xi_2(a_1, a_2, a_3, a_4)$ представляет нулевой элемент гомологий $H(a_1, a_2, a_3, a_4)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{H(a_1, a_2, a_3, a_4)} \varphi_\sigma^*(I_n(\gamma_1 \otimes \dots \otimes \gamma_n)) = \int_{H(a_1, a_2, a_3, a_4)} \sum_{i,j=1}^n I_{|S_1|}(\bigotimes_{p \in S_1} \gamma_p \otimes e_i) \eta^{ij} I_{|S_2|}(e_j \otimes \bigotimes_{q \in S_2} \gamma_q) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{k=0}^m \sum_{\lambda, \mu=0}^n \langle \alpha, \beta, i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(k)}, \lambda \rangle \eta^{\lambda\mu} \langle \mu, \gamma, \delta, i_{\sigma(k+1)}, \dots, i_{\sigma(m)} \rangle - \\ &\quad \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{k=0}^m \sum_{\lambda, \mu=0}^n \langle \beta, \gamma, i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(k)}, \lambda \rangle \eta^{\lambda\mu} \langle \mu, \delta, \alpha, i_{\sigma(k+1)}, \dots, i_{\sigma(m)} \rangle. \end{aligned}$$

Это равенство означает условие когерентности для семейства величин $\{\langle e_{i_1}, \dots, e_{i_n} \rangle\}$.

Сопоставим теперь семейство линейных отображений $I_n : H^{\otimes n} \rightarrow H^*(\overline{M}_{0,n}), n = 3, 4, \dots$, произвольной системе корреляторов $\{\langle i_1, \dots, i_m \rangle\}$. Зафиксируем базис $\{e_1, \dots, e_n\}$. Для построения семейства отображений мы должны сопоставить каждому набору $\{i_1, \dots, i_m\}$ линейные

функционалы $I_n(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_m}) : H_*(\overline{M}_{0,n}) \rightarrow \mathbb{C}$, то есть определить значение этого функционала на каждой перетянутой сфере с отмеченными точками.

Для сферы без перетяжек $M_{0,n}$ положим $I_n(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_m})(M_{0,n}) = \langle i_1, \dots, i_m \rangle$. В случае, если перетянутая сфера M разбивает множество индексов (i_1, \dots, i_m) на группы $(i_1^1, \dots, i_1^{n_1}), \dots, (i_k^1, \dots, i_k^{n_k})$ положим

$$I_n(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_m})(M) = \sum_{\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_{k-1}, \beta_{k-1}=1}^n \langle i_1^1, \dots, i_1^{n_1}, \alpha_1 \rangle \eta^{\alpha_1 \beta_1} \langle \beta_1, i_2^1, \dots, i_2^{n_2}, \alpha_2 \rangle$$

$\eta^{\alpha_2 \beta_2} \dots \eta^{\alpha_{k-1} \beta_{k-1}} \langle \beta_{k-1}, i_k^1, \dots, i_k^{n_{k-1}} \rangle$ и продолжим функционал по линейности на все линейные комбинации перетянутых сфер. Свойство когерентности корреляторов гарантирует, что ядро этого функционала содержит разности $\xi_1(a_1, a_2, a_3, a_4) - \xi_2(a_1, a_2, a_3, a_4)$ для любой четверки отмеченных точек. С другой стороны эти соотношения порождают все другие соотношения между перетянутыми сферами в группе $H_*(\overline{M}_{0,n})$. Таким образом, мы построили семейство гомоморфизмов $\{I_n : H^{\otimes n} \rightarrow H^*(\overline{M}_{0,n}), n = 3, 4, \dots\}$ такое, что $\langle e_{i_1}, \dots, e_{i_n} \rangle = \int_{\overline{M}_{0,n}} I_n(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n})$. Более того, эта конструкция переводит

условие когерентности корреляторов в условие расщепляемости когомологической теории поля. \square

Когомологическая теория поля, где $I_n(H^{\otimes n}) \subseteq H^0(\overline{M}_{0,n})$, $n = 3, 4, \dots$, называется *топологической теорией поля* [2]. Категория топологических теорий поля изоморфна категории фробениусовых пар [3], [1]. По образцу топологической теории поля можно построить более общую *теорию поля со значением в функторе* [7], включающую в себя не только когомологическую теорию поля, но и множество ее других в том числе некоммутативных аналогов. Они, в свою очередь приводят некоммутативным аналогам систем корреляторов и фробениусовых многообразий [7], [8].

11. ИНВАРИАНТЫ ГРОМОВА-ВИТТЕНА

Естественные примеры когомологической теории поля дает теория инвариантов Громова-Виттена [6].

Пусть (X, ω) — симплектическое многообразие такое, что

$$H^{2k+1}(X, \mathbb{C}) = 0 \text{ и } H^{2k}(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{m_k}.$$

Определение 11.1. *Тензор*

$$J \in TX \otimes T^*X \quad (J_p : T_p X \rightarrow T_p X)$$

называется *почти комплексной структурой*, если $J_p^2 = -1$. *Почти комплексная структура называется согласованной с ω* , если тензор $g(a, b) = \omega(a, Jb)$ порождает риманову метрику на X .

Пусть J согласована с ω и $c_1 \in H^2(X, \mathbb{Z})$ — класс Черна, соответствующий J . Можно доказать, что ω полностью определяет c_1 .

Пусть Σ — риманова поверхность рода g . Тогда $T_p \Sigma \cong \mathbb{C}$, для каждого $p \in \Sigma$, и умножение на $i = \sqrt{-1}$ дает отображение $j_p : T_p \Sigma \rightarrow T_p \Sigma$, где $j_p^2 = -1$.

Определение 11.2. *Отображение $u : \Sigma \rightarrow X$ называется J -голоморфным, если для каждого $p \in \Sigma$ отображение $(du)_p : T_p \Sigma \rightarrow T_{u(p)} X$ удовлетворяет условию $J_{(u(p))} (du)_p = (du)_p j_p$.*

Определение 11.3. Пусть

$$A \in H_2(X, \mathbb{Z}); \quad k, \ell \in \mathbb{Z}; \quad x_1, \dots, x_k \in \Sigma;$$

$$a_i, b_j \in H(X, \mathbb{Z}) \quad (i = 1, \dots, k; \quad j = 1, \dots, \ell).$$

Пусть $\tilde{a}_i \in a_i$, $\tilde{b}_i \in b_i$ — многообразия, представляющие a_i и b_i . Обозначим через

$$\Phi_{g,k,\ell}^A(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_k | \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_\ell)$$

число J -голоморфизмов $u : \Sigma \rightarrow X$ таких, что $u(\Sigma) \in A$, $u(x_i) \in \tilde{a}_i$ и $u(\Sigma) \cap \tilde{b}_i \neq \emptyset$.

Теорема-Определение 11.1. Пусть $(\omega, A) > 0$ и $(c_1, A) \geq 0$. Тогда число

$$\Phi_{g,k,\ell}^A(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_k | \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_\ell)$$

полностью определяется циклами $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_\ell$. Оно конечно, если a_i, b_j однородны и

$$\sum_{i=1}^k \dim a_i + \sum_{j=1}^{\ell} \dim b_j = 2n(g + k - 1) + 2\ell(n - 1) - 2(c_1, A).$$

В противном случае мы положим

$$\Phi_{g,k,\ell}^A(a_1, \dots, a_k | b_1, \dots, b_\ell) = 0.$$

Числа

$$\Phi_{g,k,\ell}^A(a_1, \dots, a_k | b_1, \dots, b_\ell)$$

называются инвариантами Громова-Виттена.

Пример 11.1. Пусть $X = \mathbb{C}P^n$, A — образующая $H_2(P^n, \mathbb{Z})$, $g = 0, k = 3, \ell = 0$. Пусть \tilde{a}_1, \tilde{a}_2 — точки и \tilde{a}_3 — гиперплоскость, представляющая образующую $H_{2n-2}(P^n, \mathbb{Z})$. Пусть

$$x_1, x_2, x_3 \in \Sigma = \mathbb{C} \cup \infty,$$

где $x_1 = 0, x_2 = \infty, x_3 = 1$. Тогда $\Phi_{0,3,0}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3)$ — это числа прямых $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}P^n$ таких, что $u(0) = \tilde{a}_1, u(\infty) = \tilde{a}_2$ и $u(1) \in \tilde{a}_3$.

Таким образом, $\Phi_{0,3,0}(a_1, a_2, a_3) = 1$.

Свойства инвариантов Громова-Виттена подробно изучены в [10]. Приведем лишь важное для нас следствие этой работы. Выберем в $H(X, \mathbb{C})$ базис h_1, \dots, h_n , состоящий из однородных элементов c_i таких, что $c_1 = X$ и индекс пересечения $\langle h_i, h_j \rangle = \delta_{i+j, n+1}$.

Теорема 11.1. Числа $\langle i_1, \dots, i_{l+3} \rangle = \Phi_{0,3,l}(h_{i_1}, h_{i_2}, h_{i_3} | h_{i_4}, \dots, h_{i_{l+3}})$ образуют систему корреляторов относительно матрицы $\eta^{ij} = i + j = n + 1$.

Потенциал соответствующего фробениусова многообразия имеет вид

$$F(t^1, \dots, t^n) = \sum_{A \in H_2(X, \mathbb{Z})} \sum_{\ell \geq 0} \frac{1}{(\ell + 3)!} \Phi_{0,3,\ell}^A(x, x, x | x, \dots, x) \exp(-\langle \omega, A \rangle),$$

где $x = \sum_{i=1}^n t^i h_i$ и $\Phi_{0,3,\ell}^A : H^{\ell+3} \rightarrow \mathbb{C}$ — линейный функционал порожденный инвариантами Громова-Виттена $\Phi_{0,3,\ell}^A$.

Положим

$$E = \sum_{\alpha=1}^n (1 - q_\alpha) t^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha} - \sum \tau_\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha},$$

где

$$q_\alpha = \frac{1}{2} \dim h_\alpha$$

и

$$c_1(X) = \sum_\alpha \tau_\alpha h_\alpha.$$

Теорема 11.2. Пара (F, E) удовлетворяет уравнению $WDVV$.

Пример 11.2. (Концевич и Манин). $X = \mathbb{C}P^2$. Пусть p — образующая $H_2(X, \mathbb{Z})$. Тогда $(1, p, p^2)$ образуют базис в $H(X, \mathbb{Z})$ и

$$F(t^1, t^2, t^3) = \frac{1}{2}(t^1(t^2)^2 + (t^1)^2 t^3) = \sum_{d>0} N(d) \frac{(t^3)^{3d-1}}{(3d-1)!} e^{dt^2},$$

где $N(d)$ — число рациональных кривых степени d , проходящих через $3d-1$ точек общего положения.

Уравнение ассоциативности дает

$$N(d) = \frac{1}{2} \sum_{d_1+d_2=d} \frac{d_1 d_2 (3d d_1 d_2 - 2d^2 + 6d_1 d_2) (3d-4)!}{(3d_1-1)! (3d_2-1)!} \cdot N(d_1) \cdot N(d_2).$$

12. СВЯЗКА ПЛОСКИХ КОМЕТРИК

Наряду с обычными метриками мы будем использовать и кометрики, то есть тензорные поля $h^* \in TM \otimes TM$, которые дадут в каждой точке $p \in M$ невырожденную симметрическую билинейную форму на T_p^*M . Тогда равенство $h^*(\varphi(a), \ell) = (a, \ell)$, где $a \in T_p M$, $\ell \in T_p^* M$ и $(a, \ell) = \ell(a)$, дает изоморфизм $\varphi : T_p M \rightarrow T_p^* M$, который порождает обычную метрику $h(a, b) = h^*(\varphi(a), \varphi(b))$. Тензоры h и h^* называются сопряженными. Если t^1, \dots, t^n — координаты на $U \ni p$ и

$$h = \sum_{ij} h_{ij} dt^i \otimes dt^j, \quad h^* = \sum_{ij} h^{ij} \frac{\partial}{\partial t^i} \otimes \frac{\partial}{\partial t^j},$$

то

$$\sum_k h_{ik} h^{kj} = \delta_{ij}.$$

Метрика h порождает связность Леви-Чевита ∇ с символами Кристоффеля

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_s h^{ks} \left(\frac{\partial h_{sj}}{\partial t^i} + \frac{\partial h_{is}}{\partial t^j} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial t^s} \right).$$

При этом

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \quad \frac{\partial}{\partial t^k} h_{ij} = \sum_s (\Gamma_{ik}^s h_{sj} + \Gamma_{kj}^s h_{is})$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t^k} h^{ij} = - \sum_s (\Gamma_{sk}^i h^{sj} + \Gamma_{ks}^j h^{is}).$$

Положим

$$\nabla^i = \sum_s h^{is} \nabla_s \quad \text{и} \quad \Gamma_k^{ij} = h^*(dt^i, \nabla_k dt^j) = - \sum_s h^{is} \Gamma_{sk}^j.$$

Тогда

$$\frac{\partial h^{ij}}{\partial t^k} = \Gamma_k^{ij} + \Gamma_k^{ji} \text{ и } \sum_s h^{is} \Gamma_s^{jk} = \sum_s h^{js} \Gamma_s^{ik}.$$

Кометрика h^* называется плоской, если $h^{ij} = \text{const}$ для некоторых координат (t^1, \dots, t^n) .

Задача 12.1. . Доказать, что кометрика h^* плоская, если и только если

$$\sum_s h^{is} \left(\frac{\partial \Gamma_\ell^{jk}}{\partial t^s} - \frac{\partial \Gamma_s^{jk}}{\partial t^\ell} \right) + \sum_s \Gamma_s^{ij} \Gamma_\ell^{sk} - \sum_s \Gamma_s^{ik} \Gamma_\ell^{sj} = 0$$

для всех i, j, k, ℓ .

Определение 12.1. Пара кометрик (h_1^*, h_2^*) называется связкой плоских кометрик, если для каждого $\lambda \in \mathbb{C}$ кометрика $h^* = h_1^* + \lambda h_2^*$ является плоской и ее символы Кристоффеля равны $\Gamma_k^{ij} = \Gamma_{1k}^{ij} + \lambda \Gamma_{2k}^{ij}$.

Теорема 12.1. Пусть (h_1^*, h_2^*) — связка плоских кометрик. Положим

$$\Delta^{ijk} = \sum_s (h_2^{is} \Gamma_{1s}^{jk} - h_1^{is} \Gamma_{2s}^{jk}) \text{ и } \Delta_k^{ij} = \sum_s h_{2ks} \Delta^{sij}.$$

Тогда

$$\sum_s \Delta_s^{ij} \Delta_\ell^{sk} = \sum_s \Delta_s^{ik} \Delta_\ell^{sj}$$

и существует векторное поле

$$f = \sum_i f^i \frac{\partial}{\partial t^i}$$

такое, что

$$\Delta^{ijk} = \nabla_2^i \nabla_2^j f^k, \quad h_1^{ij} = \nabla_2^i f^j + \nabla_2^j f^i + c h_2^{ij} \quad (c = \text{const}),$$

и

$$\sum_{s,t} (h_1^{is} h_2^{jt} - h_2^{is} h_1^{jt}) \nabla_{2s} \nabla_{2t} f^k = 0.$$

Proof. Пусть (t^1, \dots, t^n) — плоские координаты для h_2 . Тогда $h_2^{ij} = \text{const}$, $\Gamma_{2k}^{ij} = 0$, $\Delta^{ijk} = \sum_s h_2^{is} \Gamma_{1s}^{jk}$, $\Delta_k^{ij} = \Gamma_{1k}^{ij}$. Согласно задаче 12.1

$$\sum_s (h_1^{is} + \lambda h_2^{is}) \left(\frac{\partial \Delta_\ell^{jk}}{\partial t^s} - \frac{\partial \Delta_s^{jk}}{\partial t^\ell} \right) + \sum_s (\Delta_s^{ij} \Delta_\ell^{sk} - \Delta_s^{ik} \Delta_\ell^{sj}) = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \Delta_\ell^{jk}}{\partial t^s} = \frac{\partial \Delta_s^{jk}}{\partial t^\ell}$$

и

$$\sum_s \Delta_s^{ij} \Delta_\ell^{sk} = \sum_s \Delta_s^{ik} \Delta_\ell^{sj}.$$

Согласно лемме Пуанкаре, существует тензор f^{jk} такой, что

$$\Delta_\ell^{jk} = \frac{\partial f^{jk}}{\partial t^\ell}.$$

Свойство симметрии дает

$$\sum_s (h_1^{is} + \lambda h_2^{is}) (\Gamma_{1s}^{jk} + \lambda \Gamma_{2s}^{jk}) = \sum_s (h_1^{js} + \lambda h_2^{js}) (\Gamma_{1s}^{ik} + \lambda \Gamma_{2s}^{ik}).$$

Следовательно,

$$\sum_s (h_1^{is} + \lambda h_2^{is}) \Delta_s^{jk} = \sum_s (h_1^{js} + \lambda h_2^{js}) \Delta_s^{ik}$$

и

$$\sum_s (h_1^{is} + \lambda h_2^{is}) \frac{\partial f^{jk}}{\partial t^s} = \sum_s (h_1^{js} + \lambda h_2^{js}) \frac{\partial f^{ik}}{\partial t^s}.$$

В частности,

$$\sum_s h_2^{is} \frac{\partial f^{jk}}{\partial t^s} = \sum_s h_2^{js} \frac{\partial f^{ik}}{\partial t^s}.$$

Согласно лемме Пуанкаре, отсюда следует, что существует векторное поле

$$f = \sum_i f^i \frac{\partial}{\partial t^i}$$

такое, что

$$f^{ik} = \sum_s h_2^{is} \frac{\partial f^k}{\partial t^s} = \nabla_2^i f^k.$$

Таким образом,

$$\Delta^{ijk} = \sum_s h_2^{is} \Gamma_{1s}^{jk} = \sum_s h_2^{is} \Delta_s^{jk} = \sum_s h_2^{is} \frac{\partial f^{jk}}{\partial t^s} = \sum_s h_2^{is} \frac{\partial (\nabla_2^i f^k)}{\partial t^s} = \nabla_2^i \nabla_2^j f^k.$$

Кроме того, $\lambda = 0$ дает

$$\sum_s h_1^{is} \frac{\partial f^{jk}}{\partial t^s} = \sum_s h_1^{js} \frac{\partial f^{ik}}{\partial t^s}$$

и, следовательно,

$$\sum_{s,t} h_1^{is} h_2^{jt} \nabla_{2s} \nabla_{2t} f^k = \sum_s h_1^{is} \nabla_{2s} (\nabla_2^j f^k) = \sum_s h_1^{is} \frac{\partial f^{jk}}{\partial t^s} = \sum_s h_1^{js} \frac{\partial f^{ik}}{\partial t^s} = \sum_{s,t} h_1^{js} h_2^{it} \nabla_{2t} \nabla_{2s} f^k.$$

С другой стороны,

$$\nabla_{2k} h_1^{ij} = \frac{\partial}{\partial t^k} h_1^{ij} = (\Gamma_{1k}^{ij} + \Gamma_{1k}^{ji}) = (\Delta_k^{ij} + \Delta_k^{ji}) = \frac{\partial}{\partial t^k} (f^{ij} + f^{ji}) = \nabla_{2k} (f^{ij} + f^{ji}).$$

Таким образом,

$$h_1^{ij} = f^{ij} + f^{ji} + ch_2^{ij} = \nabla_2^i f^j + \nabla_2^j f^i + ch_2^{ij}.$$

□

Задача 12.2. . Пусть h_2^{ij} — плоская кометрика и $f = \sum f^i (\partial/\partial t^i)$ — векторное поле. Тогда пара $(\nabla_2^i f^j + \nabla_2^j f^i + ch_2^{ij}, h_2^{ij})$ образует связку плоских кометрик, если и только если

$$\sum_{s,t} (h_1^{is} h_2^{jt} - h_2^{is} h_1^{jt}) \nabla_{2s} \nabla_{2t} f^k = 0$$

и

$$\sum_s \Delta_s^{ij} \Delta_\ell^{sk} = \sum_s \Delta_s^{ik} \Delta_\ell^{sj},$$

где

$$\Delta_k^{ij} = \nabla_{2k} \nabla_2^i f^j.$$

Теорема 12.2. Пусть $h_1^* = \sum_{ij} h_1^{ij} (\partial/\partial t^i) \otimes (\partial/\partial t^j)$ — плоская кометрика, Γ_{1k}^{ij} — ее символы Кристоффеля и $\frac{\partial^2 h_1^{ij}}{\partial (t^1)^2} = \frac{\partial^2 \Gamma_{1k}^{ij}}{\partial (t^1)^2} = 0$, $\det(\frac{\partial h_1^{ij}}{\partial t^1}) \neq 0$. Тогда $\Gamma_{2k}^{ij} = \partial \Gamma_{1k}^{ij} / \partial t^1$ являются символами Кристоффеля кометрики $h_2^* = \partial h_1^{ij} / \partial t^i$ и пара (h_1^*, h_2^*) является связкой плоских кометрик.

Proof. Пусть $h = h_\lambda^* = h_1^* + \lambda h_2^*$. Тогда

$$h_1^{ij}(t^1, t^2, \dots, t^n) = h_1^{ij}(0, t^2, \dots, t^n) + t^1 h_2^{ij}(t^2, \dots, t^n)$$

и

$$h^{ij}(t^1, \dots, t^n) = h_1^{ij}(0, t^2, \dots, t^n) + t^1 h_2^{ij}(t^2, \dots, t^n) + \lambda h_2^{ij}(t^2, \dots, t^n) = h_1^{ij}(t^1 + \lambda, t^2, \dots, t^n).$$

Аналогично, символы Кристоффеля кометрики h^* равны

$$\Gamma_k^{ij}(t^1, \dots, t^n) = \Gamma_{1k}^{ij}(t^1 + \lambda, t^2, \dots, t^n).$$

Следовательно, согласно задаче 12.1 кометрика h^* является плоской. Кроме того,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{h_\lambda^*}{\lambda} = h_2^*,$$

а символы Кристоффеля при этом стремятся к Γ_{2k}^{ij} . Таким образом, Γ_{2k}^{ij} являются символами Кристоффеля h_2^* . □

REFERENCES

- [1] Alexeevski A., Natanzon S., Noncommutativ two-dimensional topological field theories and Hurwitz numbers for real algebraic curves. Selecta Math., New ser. v.12,n.3, 2006, p. 307-377 (arXiv: math.GT/0202164).
- [2] Atiyah M., Topological Quantum Field Theories, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 68 (1988), 175-186.
- [3] Dijkgraaf R., Geometrical approach to two-dimentional conformal field theory. Ph.D.Thesis, Utrecht, 1989.
- [4] B.Dubrovin "Geometry of 2D topological field theories", Springer, Let. Notes in Math. 1620(1996), 120-348.
- [5] S.Keel "Intersection theory of moduli spaces of stable n-pointed curves of genus zero" Tans.AMS,330(1992),545-574.
- [6] M.Kontsevch, Yu.Manin "Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry", Comm.Math.Phys.,196 (1998),385-398.
- [7] S.Natanzon, "Extended cohomological field theories and noncommutative Frobenius manifolds", Geometry and Physics, 51 / 4, (2004), 387-403.
- [8] S.Natanzon, "Singularities and noncommutative Frobenius manifolds", Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2007, v.259, p.137-148
- [9] S.Natanzon, V.Turaev "Systems of correlatos and solutions of WDVV equations" Comm.Math.Phys. 196(1998), 399-410
- [10] Y.Ruan, G.Tian "A mathematical theory of quantum cohomology" Jor.Diff.Geom. 42(1995), 259-367
- [11] К.Фейс "Алгебра: кольца модули и категории" Москва "Мир" 1977г
- [12] Ю.И.Манин "Фробениусовы многообразия" Москва "Факториал пресс" 2002г
- [13] С.М.Натанзон "Геометрия двумерных топологических теорий поля" Москва, МЦНМО, МК НМУ 1998г