Модули

Правила игры. Для получения максимальной оценки за листок достаточно решить либо 75% задач без звёздочек, либо 75% задач без кружочков.

Обозначения. A — коммутативное кольцо с единицей, M — модуль над кольцом A.

◊ **12.1°.** Пусть I — идеал в A, M — модуль над A.

а) Докажите, что множество $IM = \{\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i u_i, \quad \alpha_i \in I, u_i \in M, n \in \mathbb{N}\}$ является подмодулем в M.

б) Определим умножение элементов из фактор-модуля M/IM на элементы из фактор-кольца A/I следующим образом: $(a+I)\cdot(u+IM) = au + IM$. Докажите, это умножение определяет на M/IM структуру модуля над A/I.

◊ **12.2°.** Докажите, что ядро и образ гомоморфизма модулей являются подмодулями, и докажите теорему о гомоморфизме $M/\operatorname{Ker} f \cong \operatorname{Im} f$. ($f\colon M \to N$ — гомоморфизм модулей.)

◊ **12.3°. а)** Пусть I — максимальный идеал в A, а конечно порожденный модуль M свободен, т.е. $M \cong A^n$. Докажите, что M/IM представляет собой n-мерное линейное пространство над полем $K = A/I$.

б) Предположим, что $M \cong A^n$ и $M \cong A^m$. Докажите, что $m = n$. Это число называется рангом свободного модуля M и обозначается $\operatorname{rk} M$.

◊ **12.4.** Рассмотрим кольцо A, состоящее из всевозможных последовательностей действительных чисел: $A = \{(x_1, x_2, \ldots),\ x_i \in \mathbb{R}\}$ (операции сложения и умножения покомпонентные). Рассмотрим два свободных A-модуля: $M = A^2$ (это свободный модуль ранга 2) и $N = A$ (это свободный модуль ранга 1) Между M и N можно установить взаимно-однозначное соответствие следующим образом: паре последовательностей $((x_1, x_2, \ldots); (y_1, y_2, \ldots)) \in M$ сопоставляется последовательность $(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots) \in N$. Докажите, что это взаимно-однозначное соответствие. Противоречит ли это результату предыдущей задачи?

◊ **12.5.** Рассмотрим поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ как модуль над $\mathbb{Z}$ (с обычным умножением).

а) Докажите, что любой конечно-порожденный подмодуль в $\mathbb{Q}$ является свободным модулем ранга 1. Приведите пример такого подмодуля, не являющегося идеалом в $\mathbb{Z}$.

б) Укажите какой-нибудь собственный $\mathbb{Z}$-подмодуль в $\mathbb{Q}$, не являющийся конечно порожденным.

в) Докажите, что $\mathbb{Q}$ не является свободным модулем над $\mathbb{Z}$.

◊ **12.6°.** Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — стандартный базис решётки $\mathbb{Z}^n$. Докажите, что набор векторов $e'_1, \ldots, e'_n$ образует базис тогда и только тогда, когда определитель матрицы перехода между этими базисами равен ± 1.

◊ **12.7.** Пусть $L \subset \mathbb{Z}^n$ — подрешетка. Докажите, что L выделяется в $\mathbb{Z}^n$ прямым слагаемым тогда и только тогда, когда для порожденного ею подпространства $\langle L \rangle \subset \mathbb{R}^n$ верно, что $\langle L \rangle \cap \mathbb{Z}^n = L$.

◊ **12.8.** Рассмотрим кольцо $A = \{p/q,\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, (q, 2) = 1\}$. (Докажите, что это кольцо!) Является ли $\mathbb{Q}$ свободным A-модулем?

◊ **12.9. а)** Пусть M — конечно порожденный модуль кручения над A (т.е. $\operatorname{Ann} u \neq \{0\}\ \forall u \in M$, кольцо A предполагается без делителей нуля). Докажите, что $\operatorname{Ann} M \neq \{0\}$.

б) Приведите пример модуля кручения, для которого $\operatorname{Ann} M = \{0\}$.

◊ **12.10°. а)** Приведите пример такого собственного ненулевого подмодуля $N \subset M$ в каком-нибудь модуле M, который не выделяется прямым слагаемым. (Т.е. не существует такого подмодуля $L \subset M$, что $M = N \oplus L$.)

б) Приведите пример к предыдущему пункту, в котором оба модуля M и N свободны и конечно порождены.

$\diamondsuit$ **12.11.** Пусть I и J — два идеала кольца A, причем $I+J=(1)$ и $I\cap J\subset \operatorname{Ann} M$, где M — некоторый A-модуль.

а) Докажите, что множества $N_I=\{u\in M,\ \operatorname{Ann} u\supset I\}$ и $N_J=\{u\in M,\ \operatorname{Ann} u\supset J\}$ являются подмодулями в M. **б)** Докажите, что $M=N_I\oplus N_J$.

$\diamondsuit$ **12.12.** Пусть N — подмодуль модуля M, причем фактормодуль M/N свободен. Докажите, что тогда N выделяется в M прямым слагаемым (т.е. существует такой подмодуль $L\subset M$, что $M=N\oplus L$.)

$\diamondsuit$ **12.13.** **а)** Докажите, что конечно порожденный модуль без кручения над кольцом главных идеалов свободен.

б) Приведите пример модуля над кольцом главных идеалов, который не свободен.

$\diamondsuit$ **12.14.** **а)** Докажите, что конечно порожденный модуль над кольцом главных идеалов есть прямая сумма своего подмодуля кручения и свободного модуля.

б) Приведите пример модуля, в котором подмодуль кручения не выделяется прямым слагаемым.

$\diamondsuit$ **12.15.** **а)** Докажите, что конечно порожденный модуль над кольцом главных идеалов A можно однозначно представить в виде прямой суммы подмодулей, аннуляторы которых имеют вид (p^n), где p — простой элемент кольца A.

б) Докажите, что конечно порожденный модуль над кольцом главных идеалов A, аннулятор которого имеет вид (p^n), где p — простой элемент кольца A, можно представить в виде прямой суммы модулей вида $A/(p_i^k)$ (такие модули называются *примарными циклическими*).

$\diamondsuit$ **12.16*.** **а)** Докажите, что подмодуль конечно порожденного модуля над кольцом главных идеалов конечно порожден. (На самом деле это утверждение верно для гораздо более широкого класса колец, в частности, для нетеровых колец.)

б) Приведите пример конечно порожденного модуля, имеющего подмодуль, который не является конечно порожденным.

Указание. Для начала придумайте пример нenётерова кольца.

$\diamondsuit$ **12.17*.** Пусть M — свободный модуль над кольцом главных идеалов A, $e_1,e_2,\ldots,e_n$ — базис M, $u=x_1e_1+\ldots+x_ne_n\in M$, где $x_i\in A$. Докажите, что подмодуль $\langle u\rangle$ выделяется прямым слагаемым в M тогда и только тогда, когда идеал $(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(1)$.

$\diamondsuit$ **12.18*** **(Нормальная форма Фробениуса).** Выведите из теоремы о конечно порожденных модулях над кольцами главных идеалов следующее утверждение: матрицу линейного оператора $A\in \operatorname{Mat}_n(C)$ можно привести подходящей заменой базиса к виду

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0\\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_1\\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1}\end{pmatrix},$$

где a_i — коэффициенты характеристического многочлена матрицы A.

$\diamondsuit$ **12.19*.** Выведите из предыдущей задачи теорему Гамильтона–Кэли.

$\diamondsuit$ **12.20*.** Придумайте и докажите теорему о каноническом виде линейного оператора над полем вещественных чисел.

$\diamondsuit$ **12.21*.** Придумайте и докажите теорему о каноническом виде четырехмерного линейного оператора над полем $\mathbb{F}_2$.