17.1$^{\text{O}}$. Исследуйте следующие функции f на условный экстремум методом множителей Лагранжа. В пп. 1–5 рекомендуется нарисовать линии уровня функции f, кривую, на которой f исследуется на экстремум, и отметить точки, в которых эта кривая касается линий уровня f.
1) $x^2 + y^2$ при $xy = 1$;
2) xy при $x^2 + y^2 = 1$;
3) xy при $x^3 + y^3 - 2xy = 0$;
4) xy при $2x^2 + 8y^2 - x^2y^2 = 0$;
5) $x^2 + 4y^2$ при $(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) - 1$;
6) $x + y + z$ при $1/x + 4/y + 9/z = 1$;
7) $x^2 + 2y^2 + 3z^2$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

17.2. Найдите n-мерный параллелепипед максимального объема с заданным периметром a.

17.3. Найдите треугольник заданного периметра, который при вращении около одной из сторон образует тело наибольшего объема.

17.4. Около прямоугольного параллелепипеда со сторонами $2a$, $2b$ и $2c$ опишите эллипсоид наименьшего объема.

17.5. Найдите экстремумы функции $f(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ при $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$.

17.6. 1) Найдите максимум функции $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$ при $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p = 1 \quad (p > 1)$.
(*Указание*: чтобы ответ выглядел красиво, введите такое число q, что $1/p + 1/q = 1$.)
2) (*неравенство Гёльдера*). Пусть $p > 1$ и $1/p + 1/q = 1$. Докажите, что

$$\Big|\sum_i x_i y_i\Big| \leqslant \Big(\sum_i |x_i|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_i |y_i|^q\Big)^{1/q}$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$.

17.7 (*неравенство Минковского*)**.** Пусть $p \geqslant 1$. Докажите, что

$$\Big(\sum_i |x_i + y_i|^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\sum_i |x_i|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_i |y_i|^p\Big)^{1/p}$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Замечание. Из неравенства Минковского следует, что функция $x \mapsto \|x\|_p = \Big(\sum_i |x_i|^p\Big)^{1/p}$ является нормой на $\mathbb{R}^n$ при всех $p \geqslant 1$.

17.8 (*неравенство Коши*)**.** Докажите, что $\dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$ при $x_i \geqslant 0$.

17.9. Исследуйте на экстремум квадратичную форму $\sum a_{ij} x_i x_j$ (где $a_{ij} = a_{ji}$) при $\sum x_i^2 = 1$.

17.10. Пусть $M = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = 0\}$, где $F = (F_1, \ldots, F_m) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — гладкое отображение, причем $\operatorname{rk} dF(x) = m$ при $x \in M$ (так что M — подмногообразие в $\mathbb{R}^n$). Пусть f — гладкая функция, $L(x) = f(x) - \sum_i \lambda_i F_i(x)$ — соответствующая функция Лагранжа, и $dL(x_0) = 0$ в некоторой точке $x_0 \in M$. Может ли ограничение f на M иметь экстремум в точке x_0, если гессиан $H_L(x_0)$ принимает значения разных знаков **1)** на $T_{x_0}M$; **2)** на $T_{x_0}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$?