Математические основы естествознания

Статистическая физика

Листок СФ-3. Модели статистической механики на решетке.

Обязательная задача: 1а.

1. В предположении, что система находится в тепловом равновесии с термостатом при температуре T, найти свободную энергию f, приходящуюся на один узел (т.е. предел $f = -T \lim_{N\to\infty} N^{-1} \log Z_N$, где Z_N – статистическая сумма) для следующих моделей.

   а) Цепочка из N магнитных моментов τ_i, каждый из которых может принимать три значения: $\tau_i = 0, \pm 1$. Энергия конфигурации $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N\}$ равна
   $$E(\{\tau_i\}) = -J \sum_{i=1}^{N} \tau_i \tau_{i+1}$$
   (наложено периодическое граничное условие $\tau_{i+N} = \tau_i$).

   б) Две параллельные цепочки магнитных моментов σ_i, σ_i' $(i = 1, 2, \ldots, N)$ с периодическим граничным условием $\sigma_{N+1} = \sigma_1$, $\sigma_{N+1}' = \sigma_1'$ и энергией
   $$E(\{\sigma_i\}, \{\sigma_i'\}) = -J_1 \sum_{i=1}^{N} (\sigma_i \sigma_{i+1} + \sigma_i' \sigma_{i+1}') - J_2 \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \sigma_i'$$

   в)* Цепочка из N магнитных моментов σ_i, каждый из которых может принимать два значения: $\sigma_i = \pm 1$. Энергия конфигурации $\{\sigma_i\} = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N\}$ равна
   $$E(\{\sigma_i\}) = -J \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \sigma_{i+1} - K \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \sigma_{i+2}$$
   (цепочка свернута в кольцо, т.е. $\sigma_{i+N} = \sigma_i$).

2. Рассмотрим одномерную модель Изинга с магнитными моментами $\sigma_i = \pm 1$ без внешнего поля на цепочке из N узлов при температуре T. В первом случае цепочка свернута в кольцо (периодическое граничное условие), а во втором крайние моменты фиксированы: $\sigma_1 = \sigma_N = 1$. В первом случае энергия равна
   $$E_1 = -J \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \sigma_{i+1} \qquad (i + N \equiv i),$$
   а во втором
   $$E_2 = -J\sigma_2 - J \sum_{i=2}^{N-2} \sigma_i \sigma_{i+1} - J\sigma_{N-1}$$
   Считая N большим, найти разность свободных энергий $F_2 - F_1$.