"Спецфункции". Лекция 11

1. Рассмотрим гипергеометрический интеграл от какого-нибудь иного полного дифференциала, например,

$$\int_1^\infty d\left(w^{a-c}(w-1)^{c-b-1}(w-z)^{-a}\right) = \int_1^\infty \frac{d}{dw} w^{a-c}(w-1)^{c-b-1}(w-z)^{-a} dw.$$

Этот интеграл сходится и равен нулю при $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$. Дифференцируя произведение, получаем:

$$\begin{aligned}
&0 = (a-c)\int_1^\infty w^{a-c-1}(w-1)^{c-b-1}(w-z)^{-a}dw+\\
&(c-b-1)\int_1^\infty w^{a-c}(w-2)^{c-b-1}(w-z)^{-a}dw - a\int_1^\infty w^{a-c}(w-1)^{c-b-1}(w-z)^{-a-1}dw =\\
&(a-c+1)\frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)}F(a,b;c;z) + (c-b-1)\frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b-1)}{\Gamma(c-1)}F(a,b;c-1;z)-\\
&a\frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)}F(a+1,b;c;z) = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)}\left((a-c+1)F(a,b;c;z)+\right.\\
&\left.(c-1)F(a,b;c-1;z) - aF(a+1,b;c;z)\right)
\end{aligned}$$

откуда получаем тождество

$$(a-c+1)F(a,b;c;z) + (c-1)F(a,b;c-1;z) - aF(a+1,b;c;z) = 0 \qquad (1)$$

По принципу аналитического продолжения оно верно для всех значений параметров a, b, c.

Гипергеометрические функции с одним и тем же аргументом и параметрами, среди которых два одинаковых, а третий отличается на единицу, называются смежными (contiguous). Например, смежными являются функции $F(a,b;c;z)$ и $F(a+1,b;c;z)$. Нетрудно понять, что имеется 6 гипергеометрических функций, смежных данной гипергеометрической функции $F(a,b;c;z)$. Гаусс доказал следующую теорему:

гипергеометрическая функция и любые две смежные к ней линейно зависимы над полем рациональных функций переменной z. Формула (1) является примером такого соотношения. В нем коэффициенты постоянны. Вот пример соотношения с функциональными коэффициентами:

$$[c-2a-(b-a)z]F(a,b;c;z) + a(1-z)F(a+1,b;c;z) - (c-a)F(a-1,b;c;z) = 0 \qquad (2)$$

2. Если значение параметра a или b - целое отрицательное числа, то гипергеометрический ряд конечен и представляет собой многочлен $F(a,-n;c;z)$. В силу теоремы Гаусса эти многочлены подчиняются трехчленным линейным соотношениям.

Трехчленные реккурентные соотношения характерны для ортогональных многочленов. А именно: пусть $w(x)$ - неотрицательная кусочно-непрерывная функция на интервале (a,b), равная нулю лишь в дискретном множестве точек, такая, что интеграл $\int_a^b f(x)w(x)dx$ определен для любого многочлена $f(x)$ переменной x. Формула

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\bar{g}(x)w(x)dx$$

задает положительно определенное скалярное произведение на пространстве всех многочленов и система многочленов $P_n(x)$, $\deg P_n(x) = n$ называется системой ортогональных многочленов на интервале (a, b) относительно меры $w(x)dx$, если для любых $m, n \geq 0$

$$(P_n(x), P_m(x)) = \delta_{m,n} A_n$$

для некоторых постоянных $A_n \neq 0$. Эти условия (в частности, значения величин A_n) однозначно определяют ортогональные многочлены. Общеизвестное утверждение гласит:

для каждого $n \geq 1$ существуют постоянные a_n,b_n и c_n такие, что

$$P_{n+1}(x) = (a_n x + b_n) P_n(x) + c_n P_{n-1}(x).$$

Доказательство. Подберем вначале постоянные a_n и b_n так, чтобы разность

$$P_{n+1}(x) - (a_n x + b_n) P_n(x)$$

имела степень мельшую, чем n. Это всегда можно сделать, поскольку $\deg P_{n+1}(x) = n+1$, $\deg P_n(x) = n$. В силу условия ортогональности и невырожденности формы многочлены $P_0(x), \ldots, P_{n-1}(x)$ образуют базис в пространстве многочленов степени меньшей n. Пусть

$$P_{n+1}(x) - (a_n x + b_n) P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k P_k(x).$$

Для нахождения λ_k скалярно помножим предыдущее равенство на $P_k(X)$:

$$(P_{n+1}(x), P_k(x)) - a_n (x P_n(x), P_k(x)) + b_n (P_n(x), P_k(x)) = A_k \lambda_k$$

При $k < n$ единственное ненулевое слагаемое в правой части - среднее, но и оно обращается в ноль при $k < n-1$, поскольку

$$(xP_n(x), P_k(x)) = \int_a^b x P_n(x) \bar{P}_k(x) w(x) dx = \int_a^b P_n(x) x \bar{P}_k(x) w(x) dx = (P_n(x), x P_k(x)),$$

а при $k < n-1$ многочлен $x P_k(x)$ имеет степень меньшую n. Следовательно, все $\lambda_k = 0$ при $k < n-1$.

Можно проверить, что и в самом деле гипергеометрические многочлены $F(-n, n+b; c; z)$ образуют ортогональную систему на интервале $(0, 1)$ относительно меры $w(x)dx = x^{c-1}(1-x)^{b-c}dx$ (см. задачу 7 листка 10). Эти многочлены с точностью до перенормировки и замены переменных совпадают с многочленами Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, образующих ортогональную системы на интервале $(-1, 1)$ относительно меры $(1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx$, а именно:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} F\left(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-x}{2}\right).$$

При $\alpha = \beta$ многочлены Якоби носят также название ультрасферических многочленов, или многочленов Гегенбауэра; при $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ они совпадают с многочленами Чебышева $T_n(x) = \cos n \arccos x$, при $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ получаются многочлены Чебышева второго рода, а при $\alpha = \beta = 0$ – полиномы Лежандра.

3. Вычислим преобразование Меллина гипергеометрической функции. Напомним, что преобразование Меллина $\hat{\varphi}(s)$ функции вещественного аргумента $t \in (0, \infty)$ определялось как аналитическое продолжение интеграла

$$\hat{\varphi}(s) = \int_0^\infty \varphi(t) t^{s-1} dt.$$

Для корректности определения достаточно непрерывности $\varphi(t)$ в интервале $(0, \infty)$ и наличие непустой области значений параметра s, в которой интеграл $\int_0^\infty \varphi(t) t^{s-1} dt$ сходится. Преобразование Меллина экспоненты e^{-t} давало Γ-функцию Эйлера, а из преобразования Меллина дроби $\frac{e^{-t}}{e^{-t}-1}$ получали произведение $\zeta(s)\Gamma(s)$.

Поскольку гипергеометрическая функция $F(a, b; c; t)$ имеет особенность в точке $t = 1$, естественнее исследовать преобразование Меллина функции $F(a, b; c; -t)$, которая уже хорошо определена на всем промежутке $(0, \infty)$. Воспользуемся интегральным представлением Гаусса:

$$F(a, b; c; t) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{c-b-1}(1-xt)^{-a} dx, \qquad \operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0.$$

Тем самым, вычисление преобразования Меллинасводится к подсчету двойного интеграла

$$\hat{F}(s) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^\infty dt\ t^{s-1} \int_0^1 dx\ x^{b-1}(1-x)^{c-b-1}(1+xt)^{-a}, \qquad \operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0.$$

Область абсолютной сходимости внутреннего интеграла: $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$, в результате интегрирования получается гипергеометричеся функция, которая аналитична в нуле, а на бесконечности разлагается в линейную комбинацию локальных решений, асимптотически эквивалентных t^{-a} и t^{-b} соответственно. Поэтому внешний интеграл сходится в нуле, если $\operatorname{Re} s > 0$, и в бесконечности, если $\operatorname{Re}(s-a) < 0$ и $\operatorname{Re}(s-b) < 0$. Таким образом, в случае $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$ и $\operatorname{Re} a > 0$ оба интеграла абсолютно сходятся в области $0 < \operatorname{Re} s < \min(\operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b)$. В частности, в этом случае можно поменять местами пределы интегрирования

$$\int_0^\infty dt\ t^{s-1} \int_0^1 dx\ x^{b-1}(1-x)^{c-b-1}(1+xt)^{-a} = \int_0^1 dx\ x^{b-1}(1-x)^{c-b-1} \int_0^\infty dt\ t^{s-1}(1+xt)^{-a}.$$

Внутренний интеграл $\int_0^\infty dt\ t^{s-1}(1+xt)^{-a}$, равный преобразованию Меллина функции $\varphi(t) = (1+xt)^{-a}$ уже встречался ранее при вычислении эйлеровского интеграла 1-го рода. Делаем замену $1 + tx = u^{-1}$, $dt = -x^{-1}u^{-2}du$. Тогда

$$\int_0^\infty dt\ t^{s-1}(1+xt)^{-a} = x^{-s} \int_0^1 u^{a-s-1}(1-u)^{s-1} du = x^{-s} \frac{\Gamma(a-s)\Gamma(s)}{\Gamma(a)},$$

так что

$$\begin{aligned}\hat{F}(s) =& \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-s)\Gamma(s)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)\Gamma(a)} \int_0^\infty x^{b-s-1}(1-x)^{c-b-1} dx = \\ =& \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-s)\Gamma(s)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)\Gamma(a)} \cdot \frac{\Gamma(b-s)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c-s)} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \cdot \frac{\Gamma(s)\Gamma(a-s)\Gamma(b-s)}{\Gamma(c-s)}\end{aligned}$$

Преобразование Меллина допускает обращение:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{A-i\infty}^{A+i\infty} \hat{\varphi}(s) t^{-s} ds,$$

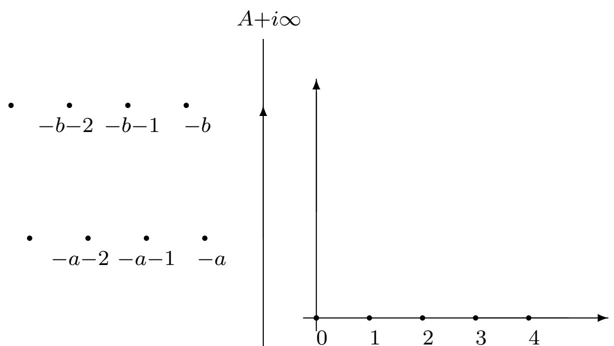
где контур интегрирования - вертикальная прямая внутри полосы аналитичности $\hat{\varphi}(s)$, а интеграл понимается в смысле главного значения. В нашем случае формула обращения выглядит так:

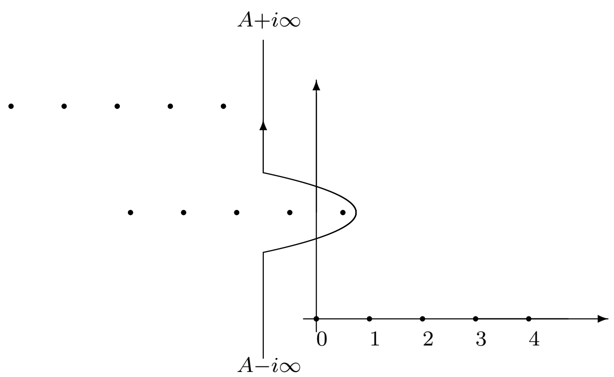
$$F(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_{A-i\infty}^{A+i\infty} \frac{\Gamma(s)\Gamma(a-s)\Gamma(b-s)}{\Gamma(c-s)}(-z)^{-s} ds$$

($-z$ под знаком степени появился потому, что вычислялось преобразование Меллина от $F(a,b;c;-z)$). Часто в интеграле делают замену $s \to -s$:

$$F(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_{A-i\infty}^{A+i\infty} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)}{\Gamma(c+s)}(-z)^{s} ds, \qquad (3)$$

получившееся интегральное представление гипергеометрической функции известно как интеграл Барнса. Контур интегрирования теперь – вертикальная прямая внутри полосы $0 > \operatorname{Re} s > -\min(\operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b)$. Он разделяет две серии особенностей подинтегрального выражения: $s = 0, 1, 2, \ldots$ с одной стороны контура, $s = -a, -a-1, \ldots$, $s = -b, -b-1, \ldots$ - с другой. При необходимости контур можно изогнуть.





Формулу Барнса (3) можно доказать и непосредственно, без ссылки на формулу обращения преобразования Меллина. Для этого рассмотрим вместо интеграла (3) интеграл по большому вертикальному отрезку $A - iR, A + iR$ и замкнем этот отрезок большой дугой радиуса R в правой полуплоскости так, чтобы эта дуга пересекала вещественную ось в полуцелой точке. Если мы покажем, что интеграл по этой дуге стремится к нулю с ростом R, то сможем заменить интеграл суммой вычетов в целых неотрицательных точках. Предположим, что $|z| < 1$. Перепишем подинтегральное выражение, пользуясь формулой дополнения для Г-функции, в виде

$$-\pi\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)}{\Gamma(1+s)\Gamma(c+s)}\cdot\frac{(-z)^s}{\sin\pi s}$$

Частное Г - функций оценим по формуле Стирлинга:

$$\begin{aligned}
&\log\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)}{\Gamma(1+s)\Gamma(c+s)}\sim\\
&(a+s-\frac{1}{2})\log(a+s)+(b+s-\frac{1}{2})\log(b+s)-(c+s-\frac{1}{2})\log(c+s)-(\frac{1}{2}+s)\log(1+s)\\
=&(a+s-\frac{1}{2})\log(s)+(b+s-\frac{1}{2})\log(s)-(c+s-\frac{1}{2})\log(s)-(\frac{1}{2}+s)\log(s)+\\
&(a+s-\frac{1}{2})\log(1+\frac{a}{s})+(b+s-\frac{1}{2})\log(1+\frac{b}{s})-(c+s-\frac{1}{2})\log(1+\frac{c}{s})-(\frac{1}{2}+s)\log(1+\frac{1}{s})\\
&=(a+b-c-1)\log s+O(1).
\end{aligned}$$

Таким образом, частное Г- функций оценивается степенным образом как $R^{a+b-c-1}$. Разобъем большой полукруг на три участка, разрезав его прямыми $\arg s = \pm\frac{\pi}{4}$. На первом и третьем участках максимальное значение числителя второй дроби равно $|z|^A$ (напомним, что у нас $|z| < 1$, $A < 0$), зато ее знаменатель, пропорциональный $e^{is} - e^{-is}$ оценивается максимальной из экспонент, $e^{R\sqrt{2}}$, которая и обеспечивает стремление к нулю интеграла по этим участкам. На втором участке, наоборот, знаменатель ограничен, зато числитель не превышает экспоненциально малого $|z|^{-R\sqrt{2}}$, обеспечивая сходимость к нулю этой части интеграла.

Напомним, что $\Gamma(s) \sim \frac{(-1)^n}{s+n}$ в окрестности точки $s = -n$, и потому вычет подинтегрального выражения в точке $s = n$ равен

$$\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)}(-z)^n = -\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{n!\Gamma(c+n)}(z)^n,$$

так что

$$F(a,b;c;z) = \sum_{n\geq 0}\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}\frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)}\frac{(z)^n}{n!},$$

что совпадает с определением гипергеометрического ряда (лишний знак исчез за счет того, что контур обходился по часовой стрелке).

Можно попытаться вычислить интеграл, замкнув вертикальный отрезок большой дугой в левой полуплоскости. Повторяя приведенные оценки, мы видим, что в этом случае интеграл по большой дуге устремится к нулю, если предположить, что $|z| > 1$. В результате интеграл сведется к сумме вычетов по точкам $-a, -a-1, \ldots$ и $-b, -b-1, \ldots$. Сумма вычетов по первой серии полюсов равна

$$\sum_{n\geq 0}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b-a-n)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-a-n)}\frac{(-1)^n}{n!}(-z)^{-a-n} =$$

$$(-z)^{-a}\sum_{n\geq 0}\frac{\Gamma(b-a-n)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a-n)}\frac{(a)_n}{n!}(z)^{-n} =$$

$$\frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}(-z)^{-a}\sum_{n\geq 0}\frac{\Gamma(b-a-n)\Gamma(c-a)}{\Gamma(b-a)\Gamma(c-a-n)}\frac{(a)_n}{n!}(z)^{-n} =$$

$$\frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}(-z)^{-a}F\left(a, a-c+1; a-b+1; z^{-1}\right).$$

Вычисление по второй серии такое же, с заменой a на b. В результате получаем разложение гипергеометрической функции по локальным решениям гипергеометрического уравнения в бесконечности:

$$\begin{aligned} F(a,b;c;z) = &\frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}(-z)^{-a}F\left(a, a-c+1; a-b+1; z^{-1}\right) \\ &+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}(-z)^{-b}F\left(b, b-c+1; b-a+1; z^{-1}\right) \end{aligned}$$

В этом равенстве левую часть следует понимать как аналитическое продолжение гипергеометрического ряда в область $-\pi \leq \arg z < \pi$.