Семинар по спецфункциям. Листок 10

1. Формула Родрига

   а) Покажите, что производная гипергеометрической функции пропорциональна гипергеометрической функции со сдвинутыми на единицу параметрами

   б) покажите, что всякое линейное дифференциальное уравнение второго порядка с аналитическими коэффициентами может быть приведено к виду

$$\frac{d}{dz}\left(\varphi(z)\frac{d}{dz}y\right)+\psi(z)y=0; \tag{1}$$

   в) для гипергеометрического уравнения соответствующие функции имеют вид $\varphi(z)=z^c(1-z)^{a+b-c+1}$, $\psi(z)=abz^{c-1}(1-z)^{a+b-c}$, а итерация соотношения (1) приводит к следующему соотношению между гипергеометрической функцией y и ее k-ой производной $y^{(k)}$:

$$\frac{d^k}{dz^k}\left(z^{c+k-1}(1-z)^{a+b-c+k}y^{(k)}\right)=(a)_k(b)_k z^{c-1}(1-z)^{a+b-c}y;$$

   г) применение этого соотношения к гипергеометрическому полиному $y=F(a,-n;c;z)$ дает формулу Родрига:

$$F(a,-n;c;z)=\frac{z^{1-c}(1-z)^{c+n-a}}{(c)_n}\frac{d^n}{dz^n}\left(z^{c+n-1}(1-z)^{a-c}\right).$$

2. Пусть $y_1(z)$, $y_2(z)$ - решения гипергеометрического уравнения с параметрами a,b,c и асимптотиками $y_1(z)\sim 1$, $y_2\sim z^{1-c}$ при $z\to 0$; $y_3(z)$ и $y_4(z)$ решения того же гипергеометрического уравнения с асимптотиками $y_3\sim(-z)^{-a}$, $y_4\sim(-z)^{-b}$ при $z\to\infty$. Найдите матрицу перехода от y_1, y_2 к y_3 и y_4.

3. Обобщите интегральное представление Барнса

$$F(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\frac{1}{2\pi i}\int_{A-i\infty}^{A+i\infty}\frac{\Gamma(-s)\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)}{\Gamma(c+s)}(-z)^s ds$$

на гипергеометрический ряд $F_{p,q}(a_1,\ldots,a_p;c_1,\ldots,c_q;z)$ при $p\leq q+1$.

4. Найдите дифференциальное уравнение второго порядка. которому удовлетворяет полином Чебышева $T_n(x)=\cos n\arccos x$. Найдите особые точки этого уравнения. Выразите полином Чебышева через гипергеометрические полиномы.

5. Полиномы Лежандра $P_n(x)$ могут быть определены как система ортогональных полиномов на отрезке $[-1,1]$ с равномерной мерой:

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=\delta_{m,n}\frac{2}{2n+1}.$$

Выведите, исходя из этого определения, дифференциальное уравнение второго порядка на $P_n(x)$, убедитесь, что оно имеет только регулярные особые точки; выразите $P_n(x)$ через гипергеометрические полиномы и выпишите для них формулу Родрига.

6. Докажите, что гипергеометрические многочлены $F(-n,n+b;c;z)$ образуют ортогональную систему на интервале $(0,1)$ относительно меры $w(x)dx=x^{c-1}(1-x)^{b-c}dx$. Один из способов - выразить скалярное произведение двух таких многочленов через скалярное произведение их производных, воспользовавшись формулами пунктов б) и в) задачи 1.

7. Пусть c - целое число. Найдите два независимых решения гипергеометрического уравнения с параметрами a,b,c, определенных в окрестности начала координат.