Глава 16

Стабильные кривые

В предыдущей главе мы ввели понятие стабильной рациональной кривой с отмеченными точками. В этой главе мы распространяем это понятие на кривые старших родов. (Модулярная) стабильность кривой означает, что она имеет конечную группу автоморфизмов.

Кривые маленьких родов ($g = 0$ и $g = 1$) становятся стабильными только, если на них отметить несколько (по крайней мере 3 в рациональном и по крайней мере одну в эллиптическом случае) точек. Если род кривой не меньше двух, то гладкие кривые стабильны, даже если на них нет отмеченных точек. Однако для компактификации пространств модулей гладких стабильных кривых к нему приходится добавлять и модули особых кривых. Пространство $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ стабильных нодальных кривых данного рода g с фиксированным числом n отмеченных точек является естественной компактификацией пространства гладких кривых. Как и пространство модулей гладких кривых положительного рода, оно, вообще говоря, не является многообразием, благодаря тому, что стабильные кривые могут иметь нетривиальные, хотя и конечные, группы автоморфизмов. Однако это не мешает пространству $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ быть гладким орбиобразием (орбифолдом).

16.1 Определение и примеры стабильных кривых

Необходимость компактификации пространств модулей кривых и требование модулярности (состоящее в том, что добавляемые к пространству модулей точки также должны соответствовать каким-то кривым) приводят к необходимости помимо гладких рассматривать также и особые кривые. При этом хотелось бы, чтобы вновь рассматриваемые особые кривые имели как можно более простые особенности и их группа автоморфизмов по-прежнему была конечной. Этим требованиям удовлетворяют так называемые стабильные кривые. Добавление стабильных кривых компактифицирует пространство модулей.

Определение 16.1.1. *Стабильной кривой* называется нодальная кривая, группа автоморфизмов которой конечна.

Это определение требует пояснения, но прежде, чем давать его, приведем пару примеров.

Пример 16.1.2. Пусть C_1, C_2 — две эллиптические кривые, p_1, p_2 — точки соответственно на первой и на второй кривой. Рассмотрим кривую, полученную путем отождествления точек p_1 и p_2. Эта кривая стабильна. Действительно, ее автоморфизмы порождены автоморфизмами кривой C_1, сохраняющими точку p_1, автоморфизмами кривой C_2, сохраняющими точку p_2, а также, быть может, автоморфизмами перестановки кривых C_1 и C_2, переводящими точку p_1 в точку p_2 (последние существуют только если кривые C_1 и C_2 изоморфны).

Пример 16.1.3. Пусть p, q — точки эллиптической кривой. Рассмотрим кривую C, полученную путем отождествления точек p и q. Эта кривая стабильна. Действительно, ее автоморфизмы порождены автоморфизмами исходной эллиптической кривой $\widetilde{C}$, полученной из C "разделением" точек p и q, сохраняющих пару точек p и q. Группа таких автоморфизмов конечна.

Напомним, что *нодальной* кривой называется такая алгебраическая кривая, у которой помимо гладких точек могут быть также точки, имеющие окрестность, биголоморфную паре дисков с одной общей точкой (которую можно считать центром обоих дисков). Такие особые точки называются *простыми двойными* точками, или *узлами*, или точками *простого самопересечения.* Число простых двойных точек на нодальной кривой конечно. Мы говорим об абстрактных кривых, однако простую двойную точку удобно представлять себе как точку трансверсального самопересечения плоской или пространственной кривой.

Для каждой нодальной кривой C определена ее *нормализация.* Это гладкая комплексная кривая $\widetilde{C}$ вместе с отображением $\widetilde{C} \to C$, являющимся локальным биголоморфизмом всюду, за исключением прообразов двойных точек. У каждой из двойных точек имеется в точности два прообраза, и у каждого из этих прообразов имеется окрестность, биголоморфно отображающаяся на один из дисков окрестности двойной точки (каждый из прообразов приписан к своему диску). В примере 16.1.2 нормализация $\widetilde{C}$ нодальной кривой C является несвязным объединением гладких кривых C_1 и C_2, а в примере 16.1.3 это связная гладкая эллиптическая кривая. Образ каждой компоненты связности при отображении нормализации называется *неприводимой компонентой* кривой C, так что кривая в примере 16.1.2 состоит из двух неприводимых компонент, а в примере 16.1.3 — из одной.

Пример 16.1.4. При $t \neq 0$ кривые семейства $y^2 = x^3 + x^2 + t$ являются гладкими плоскими эллиптическими кривыми. При $t = 0$ кривая этого семейства особая, имеющая простое самопересечение в начале координат. Ее нормализация — рациональная кривая, и сама вырожденная кубика получена склейкой двух точек этой рациональной кривой. Как мы увидим ниже, предельную кривую естественно также считать эллиптической.

Формальное определение нодальной кривой требует определения кольца мероморфных функций на ней (это нужно, скажем, для того, чтобы отличать трансверсальное самопересечение от касания). Определим кольцо мероморфных функций на нодальной кривой как кольцо мероморфных функций на ее нормализации, принимающих одинаковые конечные значения в обоих прообразах любой двойной точки.

Условие стабильности нодальной кривой накладывает на нее некоторые ограничения. Эти ограничения состоят в следующем:

- на каждой рациональной компоненте нормализации стабильной нодальной кривой должно быть по меньшей мере три прообраза двойных точек;
- на каждой эллиптической компоненте нормализации должен быть по меньшей мере один прообраз двойной точки.

Действительно, группа автоморфизмов кривой бесконечна только если ее род меньше двух, и компоненты таких родов должны быть стабилизированы прообразами двойных точек.

Теперь мы можем дать определение стабильной кривой с отмеченными точками.

Определение 16.1.5. *Стабильной кривой с отмеченными точками* называется нодальная кривая с отмеченными точками, точки самопересечения которой не совпадают с отмеченными точками и группа автоморфизмов которой конечна.

Последнее требование означает, что

- на каждой рациональной компоненте нормализации стабильной нодальной кривой должно быть по меньшей мере три специальных точки (т.е. точек, являющихся отмеченными или прообразами двойных точек);
- на каждой эллиптической компоненте нормализации должна быть по меньшей мере одна специальная точка.

16.2 Род нодальной кривой

Для того, чтобы иметь возможность доклеивать пространство модулей кривых рода g стабильными кривыми, мы должны знать, что такое род нодальной кривой. Понятие рода нужно ввести таким образом, чтобы при вырождениях гладких кривых род сохранялся. Одна из возможностей состоит в том, чтобы определить пространство голоморфных 1-форм на нодальных кривых. Тогда родом кривой будет размерность этого пространства.

Ясно, что голоморфная 1-форма на нодальной кривой должна быть голоморфной в гладких точках этой кривой. Осталось предписать ее поведение в особых точках. Разрешим такой 1-форме иметь полюса первого порядка в двойных точках на каждой ветви и потребуем, чтобы сумма вычетов в этих точках обращалась в нуль.

Итак, *геометрическим родом* нодальной кривой называется размерность пространства мероморфных 1-форм на ее нормализации, все полюса которых расположены в прообразах двойных точек, причем порядок каждого полюса не превосходит единицы и сумма вычетов на двух прообразах одной двойной точки равна нулю.

Типичным примером поведения голоморфных (и, более общим образом, мероморфных) 1-форм на вырожденной кривой — который, собственно, и приводит к данному выше определению, — служит следующий. Рассмотрим на плоскости однопараметрическое семейство рациональных кривых $xy = t$. Ограничение 1-формы dx/x на кривую этого семейства задает мероморфную 1-форму на ней, имеющую два полюса первого порядка — оба на бесконечности (вычеты в которых не зависят от t). Это ограничение совпадает с ограничением на ту же кривую 1-формы $-dy/y$ (действительно, разность этих 1-форм равна

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = d(xy)/xy,$$

и ее ограничение на кривую $xy = \mathrm{const}$ тождественно равно нулю). При обращении параметра t в нуль коника $xy = t$ вырождается в две координатные прямые, а предельная 1-форма выглядит так: на прямой $y = 0$ она совпадает с dx/x, а на прямой $x = 0$ — с 1-формой $-dy/y$. В точке пересечения вычеты у этих 1-форм противоположны. Равенство нулю суммы вычетов в прообразах двойной точки непосредственно следует из равенства нулю суммы вычетов любой мероморфной 1-формы на гладкой кривой.

Вот другое определение того же понятия рода. Окрестность двойной точки изоморфна паре дисков, пересекающихся по одной точке. Граница этой окрестности — пара окружностей. Сгладим эту пару дисков, превратив ее в цилиндр, граница которого — та же пара окружностей, и поступим так с каждой двойной точкой кривой. В результате получим гладкую компактную двумерную поверхность. Ее род и называется родом соответствующей нодальной кривой.

Упражнение 16.2.1. Докажите, что приведенные выше два определения рода нодальной кривой дают одинаковый результат.

Упражнение 16.2.2. Докажите, что если нодальная кривая получена склейкой пары точек гладкой кривой рода g, то ее род равен $g + 1$. То же верно и для склейки пары точек *нодальной* кривой геометрического рода g.

Упражнение 16.2.3. Найдите род нодальной кривой, полученной склейкой двух нодальных кривых родов, соответственно, g_1 и g_2, по паре точек.

Понятие модулярного графа рациональной нодальной кривой распространяется на кривые произвольного рода. Сопоставим нодальной кривой граф, вершины которого — неприводимые компоненты кривой, причем две вершины соединены ребром в том и только в том случае, если соответствующие компоненты пересекаются. Количество ребер, соединяющих две вершины, равно количеству точек пересечения соответствующих им неприводимых компонент. Каждой точке самопересечения неприводимой компоненты отвечает петля — ребро с совпадающими концами — в графе. Каждую вершину пометим родом нормализации соответствующей этой вершине компоненты. Такой граф называется *модулярным графом* кривой.

Упражнение 16.2.4. Нарисуйте модулярные графы всех стабильных кривых рода 2 и 3 без отмеченных точек.

Вершины модулярных графов нодальных кривых с отмеченными точками принято помечать метками расположенных на соответствующих неприводимых компонентах отмеченных точек.

Упражнение 16.2.5. Нарисуйте модулярные графы всех стабильных кривых рода 1 с одной, двумя и тремя отмеченными точками и рода 2 с одной отмеченной точкой.

Упражнение 16.2.6. Верно ли, что порядок группы автоморфизмов стабильной кривой рода g (быть может, с отмеченными точками) не может превышать $84(g-1)$?

16.3 Вырождения гладких кривых

Точками компактифицированного (по Делиню–Мамфорду) пространства модулей кривых рода g с n отмеченными точками служат классы биголоморфной эквивалентности стабильных кривых. Если компактное пространство модулей стабильных кривых $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ действительно существует, то оно обладает следующим свойством: любой голоморфный морфизм проколотого диска в $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ продолжается в выколотую точку. Это означает, что любое голоморфное семейство гладких кривых над проколотым диском доклеивается стабильной кривой. Посмотрим, как это происходит на практике.

Пример 16.3.1. Пусть нодальная кривая C с отмеченной точкой x_1 получена как результат склейки двух отличных от x_1 точек рациональной кривой. Геометрический род кривой C равен 1. Действительно, пространство голоморфных 1-форм на ней это пространство мероморфных 1-форм на $\mathbb{CP}^1$, имеющих полюса 1-го порядка в склеиваемых точках (сумма вычетов такой 1-формы в склеиваемых точках автоматически равна 0). Размерность последнего пространства равна 1.

Кривая C стабильна — группа ее автоморфизмов конечна. Как нетрудно видеть, других особых стабильных эллиптических кривых с одной отмеченной точкой нет. Присоединение к пространству модулей $\mathcal{M}_{1;1}$ точки, отвечающей кривой C, дает компактифицированное пространство модулей $\overline{\mathcal{M}}_{1;1}$. Локально это присоединение выглядит как результат вырождения семейства эллиптических кривых, описанного в примере 16.1.4 (отмеченную на всех кривых семейства точку x_1 можно считать расположенной на бесконечности). В терминах представления пространства $\mathcal{M}_{1;1}$ в виде фундаментальной области действия группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ на прямой $\mathbb{C}$, присоедениеямая к нему точка описывает предельную структуру эллиптической кривой, отвечающей решетке, натянутой на вектора 1 и $\tau = a + bi$ при $b \to \infty$.

Упражнение 16.3.2. Какую группу автоморфизмов имеет рассмотренная в предыдущем примере нодальная эллиптическая кривая с отмеченной точкой?

Пример 16.3.3. Пусть C — кривая рода $g \geq 1$, x_1 — фиксированная точка этой кривой, x_2 — переменная точка этой кривой. Обозначим через C_{x_2} кривую C с отмеченными точками x_1 и x_2. Нас интересует, к какой точке пространства модулей стремится эта кривая при $x_2 \to x_1$.

Рассмотрим двумерную поверхность $C \times D$ — прямое произведение кривой C на комплексный диск (которую мы интерпретируем как тождественное одномерное семейство кривых), расслоенное над диском D. Диск D отождествляется с окрестностью точки x_1 в кривой C, и его точки — это возможные положения точки x_2. В этом расслоении выделены два сечения — постоянное, соответствующее точке x_1, и переменное, отвечающее точке x_2. Эти два сечения трансверсально пересекаются в единственной точке — над центром диска.

Для построения стабильного предела этого семейства выполним раздутие поверхности $C \times D$ в точке пересечения сечений. В результате в эту поверхность будет вклеена проективная прямая, а сечения будут пересекать ее трансверсально. Эта прямая пересекает слой над выколотой точкой трансверсально. Вместе со слоем оно образует предельную кривую. Прообразы сечений при раздутии оставляют следы на вклеенной проективной прямой. Эти следы есть предельные положения точек x_1 и x_2. Точное их расположение не имеет значения: все тройки точек на проективной прямой эквивалентны.

Итак, предельным стабильным элементом нашего семейства является кривая C, в фиксированной точке которой приклеена проективная прямая (до вырождения эта точка является отмеченной точкой x_1), содержащая обе отмеченные точки. Возникает вопрос, нельзя ли с помощью другой конструкции получить другой предел. Единственность предела как раз и гарантируется существованием пространства модулей стабильных кривых.

Упражнение 16.3.4. Как выглядит стабильный предел однопараметрического семейства кривых рода $g + 1$, $g \geq 1$, полученных из данной гладкой кривой C рода g склейкой постоянной точки p с переменной точкой q при стремлении точки q к точке p?

16.4 Компактификация пространств модулей стабильными кривыми и плюриканонические вложения

Теперь мы можем дать строгое определение пространства модулей стабильных кривых. Про это пространство правильно думать как про универсальное семейство стабильных кривых данного рода с данным количеством отмеченных точек.

Определение 16.4.1. *Семейством стабильных кривых* рода g с n отмеченными точками называется набор $(X, B, \pi, \{s_1, \dots, s_n\})$, состоящий из

- гладкого компактного орбифолда B;
- гладкого компактного орбифолда X комплексной размерности $\dim B + 1$;
- голоморфного отображения $\pi : X \to B$;
- набора голоморфных отображений $s_i : X \to B$

и обладающий следующими свойствами:

- образы $s_i(B)$ отображений s_i не пересекаются между собой и не проходят через особые точки слоев отображения π, причем для всех $i = 1, \dots, n$ композиция $\pi \circ s_i$ является тождественным отображением, т.е. s_i — сечения отображения π;
- слои отображения π являются результатами факторизации стабильных комплексных кривых рода g с отмеченными на них n точками пересечения с образами сечений s_i по их группам автоморфизмов.

Пространство модулей гладких кривых рода g с n отмеченными точками $\mathcal{M}_{g;n}$ является гладким комплексным орбифолдом комплексной размерности $3g - 3 + n$. Над ним определено семейство гладких стабильных кривых $\mathcal{C}_{g;n}$, размерность которого равна $3g - 2 + n$. Компактификация $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ пространства $\mathcal{M}_{g;n}$ является компактным гладким комплексным орбифолдом той же размерности. Универсальная кривая $\mathcal{C}_{g;n}$ над $\mathcal{M}_{g;n}$ также допускает компактификацию. Точнее говоря, справедлива следующая теорема.

Теорема 16.4.2 (Делинь–Мамфорд)**.** *Для всякого целого неотрицательного числа g и целого неотрицательного числа n, удовлетворяющих условию $2g - 3 + n \geq 0$, существует семейство стабильных кривых рода g с n отмеченными точками $(\overline{\mathcal{M}}_{g;n}, \overline{\mathcal{C}}_{g;n}, \pi_{g;n}, \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\})$, такое, что для любого семейства стабильных кривых рода g с n отмеченными точками $(X, B, \pi, \{s_1, \dots, s_n\})$ существует единственная пара голоморфных отображений $F : X \to \overline{\mathcal{C}}_{g;n}$, $G : B \to \overline{\mathcal{M}}_{g;n}$, обеспечивающих коммутативность диаграммы*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & \overline{\mathcal{C}}_{g;n} \\ \big\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi_{g;n}} \\ B & \xrightarrow{G} & \overline{\mathcal{M}}_{g;n} \end{array}$$

и таких, что $F \circ s_i = \sigma_i \circ G$ для всех $i = 1, \dots, n$. Пространство модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ определено однозначно с точностью до биголоморфизма и неприводимо.

Допуская вольность речи, мы в дальнейшем будем говорить о *пространстве модулей стабильных кривых с n отмеченными точками* $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$, имея в виду весь определяющий его набор пространств и отображений.

Замечание 16.4.3. Заключение теоремы означает, что это пространство модулей является *грубым.* Оно было бы *тонким* пространством модулей, если бы пространства $\overline{\mathcal{C}}_{g;n}$ и $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ были гладкими многообразиями, а не орбифолдами, а слои отображения $\pi_{g;n}$ — самими стабильными кривыми, а не результатами их факторизации по действию группы автоморфизмов. Пространство $\overline{\mathcal{M}}_{0;n}$ является тонким пространством модулей при любом значении $n \geq 3$, однако при $g \geq 1$ тонких пространств модулей стабильных кривых не существует ни при каком n. Впрочем, при любом g некомпактифицированное пространство модулей $\mathcal{M}_{g;n}$ при достаточно большом n является тонким пространством модулей — нужно лишь выбрать значение n превосходящим максимальное количество неподвижных точек у нетривиального автоморфизма гладкой кривой рода g.

Пространство модулей гладких кривых $\mathcal{M}_{g;n}$ является плотным по Зарисскому подмножеством в $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$. Его дополнение $\partial\overline{\mathcal{M}}_{g;n} = \overline{\mathcal{M}}_{g;n} \setminus \mathcal{M}_{g;n}$ называется *границей* пространства модулей стабильных кривых. Так, граница $\partial\overline{\mathcal{M}}_{1;1}$ состоит из единственной точки — рациональной кривой $\mathbb{CP}^1$ с одной отмеченной и двумя склеенными точками.

Точки границы $\partial\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ отвечают особым стабильным кривым. Как и в случае рациональных стабильных кривых, эта граница стратифицирована вырождениями кривых — каждый страт определяется количеством особых точек на своей типичной кривой, родами ее неприводимых компонент, конфигурацией склейки неприводимых компонент между собой и распределением отмеченных точек по неприводимым компонентам. Страты находятся во взаимно-однозначном соответствии с модулярными графами. При $g \geq 1$ такой граф уже необязательно является деревом, а каждой его вершине (сопоставляемой неприводимой компоненте общей кривой страта) помимо набора отмеченных точек приписано еще и неотрицательное целое число — род этой неприводимой компоненты.

Доказательство теоремы 16.4.2 проводится по той же схеме, что и доказательство существования пространства модулей гладких кривых. Стабильные кривые с отмеченными точками отображаются в проективное пространство большой размерности с помощью плюриканонического отображения подходящей степени (достаточно взять 5-ю степень канонического расслоения). Их образы в этом пространстве имеют совпадающие многочлены Гильберта. Множество образов плюриканонических отображений стабильных кривых совпадает с замыканием в схеме Гильберта множества образов гладких стабильных кривых. Пространство $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ можно определить как фактор-пространство этого замыкания по действию группы проективных преобразований объемлющего пространства.

На этом пути встречается множество трудностей. В частности, не известно прямых доказательств того, что точки Гильберта особых стабильных кривых стабильны. Ниже мы приводим ряд упражнений, пунктирно намечающих общую схему доказательства.

Упражнение 16.4.4. Сформулируйте и докажите формулу Римана–Роха для стабильных кривых.

Упражнение 16.4.5. Проверьте, что степень канонического класса на стабильной кривой рода g равна $2g-2$.

Упражнение 16.4.6. Найдите размерность пространства голоморфных сечений а) канонического расслоения; б) n-канонического расслоения на стабильной кривой.

Упражнение 16.4.7. Докажите, что 5-каноническое отображение стабильной кривой рода $g \geq 2$ без отмеченных точек является вложением.