

СЕМИНАР ПО СПЕЦФУНКЦИЯМ. ЛИСТОК 11. ДИЛОГАРИФМ

Дилогарифм $Li_2(z)$ - это функция комплексного переменного z , $|z| < 1$, определенная сходящимся рядом

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i}{i^2}$$

Заметим, что $Li_2(1) = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Вычислите производную дилогарифма. Пользуясь полученной формулой, постройте аналитическое продолжение дилогарифма на комплексную плоскость с разрезом от 1 до бесконечности. Вычислите разность значений $Li_2^{+} - Li_2^{-}$ на вещественном луче $(1, \infty)$ различных (через верхнюю Li_2^{+} и нижнюю Li_2^{-}) продолжений дилогарифма.
2. Пользуясь формулой для производной $Li_2(z)$, постройте продолжение дилогарифма до многозначной функции на комплексной плоскости без 0 и 1. Объясните возникновение особенности в нуле.
3. Выразите $Li_2(1 - z)$ через $Li_2(z)$ и логарифмы
4. Выразите $Li_2(1 - z^{-1})$ через $Li_2(z)$ и логарифмы

Дилогарифм Блоха-Вигнера (и Лобачевского) определяется как

$$Li_2^{BW}(z) = \frac{1}{2}(Li_2(z) - \overline{Li_2(z)}) + \frac{1}{4}(\log(1 - z) - \overline{\log(1 - z)})(\log(z) + \overline{\log(z)})$$

5. Найдите производные $\frac{d}{dz}$ и $\frac{d}{d\bar{z}}$ дилогарифма Блоха-Вигнера. Убедитесь, что они однозначны и непрерывны.
6. Докажите что дилогарифм Блоха-Вигнера – однозначная непрерывная функция.

Напомним, что двойное отношение $r(a, b, c, d)$ четырех чисел a, b, c, d это

$$\frac{(a - b)(c - d)}{(a - d)(c - b)}$$

Оно префективно-инвариантно, то есть инвариантно относительно дробно-линейных преобразований $x \rightarrow (\alpha x + \beta)/(\gamma x + \delta)$.

7. Выразите $Li_2^{BW}(1 - z)$ и $Li_2^{BW}(1 - z^{-1})$ через $Li_2^{BW}(z)$. Докажите, что перестановка аргументов двойного отношения действует на $Li_2^{BW}(r(a, b, c, d))$ знаком перестановки
8. Докажите что $Li_2^{BW}(z)$ ограничена при $z \rightarrow \infty$ и имеет предел в бесконечности.
9. * (Пятичленное соотношение) Для пятерки различных чисел a_1, a_2, \dots, a_5

$$\sum_{i=1}^5 (-1)^i Li_2^{BW}(r(a_1, a_2, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_5)) = 0$$

где $\hat{}$ означает пропуск аргумента.

Пятичленное соотношение может быть проинтерпретировано как условие непрерывного 3-коцикла для группы $GL_2(\mathbb{C})$.

10. * Сведущим в основах теории когомологий групп (на уровне определений) рекомендуется придумать эту интерпретацию, используя дробно-линейное действие.