18.1. Выведите теорему о неявном отображении из теоремы об обратном отображении.

Определение 18.1. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ — открытые множества. *Рангом* дифференцируемого отображения $f\colon U \to V$ в точке $x \in U$ называется ранг его дифференциала в этой точке: $\mathrm{rk}_x f = \mathrm{rk}\, df(x)$. Точка x называется *критической* для f, если $\mathrm{rk}_x f$ не максимален, т.е. меньше, чем $\min\{m, n\}$.

18.2. Докажите, что множество критических точек отображения $f \in C^1(U)$ замкнуто.

18.3. Для указанных отображений $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ найдите критические точки и образ множества этих точек при отображении f. Для каждой критической точки x найдите и нарисуйте $\mathrm{Ker}\, df(x)$. Найдите число прообразов каждой точки $y \in \mathbb{R}^2$.
1) $(x, y) \mapsto (x^2, y)$; **2)** $(x, y) \mapsto (x^2, y^2)$; **3)** $(x, y) \mapsto (x^3 + xy, y)$;
4) $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$; **5)** $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2 + 2x, 2xy - 2y)$.

18.4. Докажите эквивалентность следующих свойств подмножества $M \subset \mathbb{R}^N$, где $N = n + m$.
1) Для любой точки $x \in M$ существуют окрестность $U \ni x$ и отображение $F : U \to \mathbb{R}^m$ класса C^p такие, что $U \cap M = \{y : F(y) = 0\}$ и $\mathrm{rk}_x F = m$.
2) Для любой точки $x \in M$ можно так перенумеровать координаты в $\mathbb{R}^N$, что найдутся окрестность $U \ni x$ вида $U = I \times J$ (где $I \subset \mathbb{R}^n$ и $J \subset \mathbb{R}^m$ открыты) и отображение $f : I \to J$ класса C^p такие, что $M \cap U = \Gamma_f$ (здесь Γ_f — это график f).
3) Для любой точки $x \in M$ существуют окрестность $U \ni x$ и криволинейные координаты $y^1, \ldots, y^N$ класса C^p в U такие, что $M \cap U = \{y : y^{n+1} = \ldots = y^N = 0\}$.
4) Для любой точки $x \in M$ существуют окрестность $U \ni x$, открытое множество $V \subset \mathbb{R}^n$ и отображение $\varphi\colon V \to U$ класса C^p такие, что $\mathrm{rk}\,\varphi = n$, $M \cap U = \varphi(V)$, и $\varphi\colon V \to \varphi(V)$ – гомеоморфизм (то есть существует и непрерывно отображение $\varphi^{-1}\colon \varphi(V) \to V$).

Определение 18.2. Подмножество $M \subset \mathbb{R}^N$, удовлетворяющее условиям предыдущей задачи, называется *подмногообразием* в $\mathbb{R}^N$ размерности n.

18.5$^{\mathrm{O}}$. Являются ли следующие множества подмногообразиями? Найдите их размерности.
1) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$;
2) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$;
3) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = a\}$;
4) $\{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$;
5) $\{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 0\}$;
6) $SL(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$;
7) $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^T = A^{-1}\}$.

Определение 18.3. Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ — интервал, и пусть $\{\gamma_t\}_{t \in I}$ — семейство кривых на плоскости, заданных неявно: $\gamma_t = \{(x, y) : f_t(x, y) = 0\}$, где f_t — гладкая функция, причем $df_t \neq 0$ на γ_t. Предположим, что функция $f(t, x, y) = f_t(x, y)$ также гладкая, и положим $M = \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3 : f(t, x, y) = 0\}$. Обозначим через π проекцию $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(t, x, y) \mapsto (x, y)$. *Огибающей* семейства $\{\gamma_t\}$ называется множество $E \subset \mathbb{R}^2$, являющееся образом при проекции π тех точек из M, в которых касательная плоскость $T_x M$ (см. лекцию) содержит прямую, параллельную оси Ot.

Следующая задача показывает, как искать огибающие.

18.6. Докажите, что $E = \big\{(x, y) : \exists t \in I : \ f(t, x, y) = f'_t(t, x, y) = 0\big\}$.

А следующая задача объясняет, почему огибающая так называется.

18.7. Пусть $I_0 \subseteq I$ и $\varphi\colon I_0 \to \mathbb{R}^2$ — гладкая кривая, касающаяся γ_t в точке $\varphi(t)$ для всех t. Докажите, что $\varphi(I_0) \subset E$.

18.8. Найдите огибающую семейства отрезков постоянной длины ℓ с концами на положительных координатных полуосях.

18.9 (*кривая безопасности*)**.** Найдите границу зоны досягаемости снаряда при стрельбе из артиллерийского орудия с постоянной начальной скоростью снаряда v_0 под произвольными углами к горизонту.

18.10. Пусть $\{\gamma_t\}$ — семейство кривых на плоскости, такое, как в определении 18.3. Предположим, что для каждого $t \in I$ кривая γ_t представима в виде $\gamma_t = \{\gamma(t, s) : s \in J\}$, где $J \subseteq \mathbb{R}$ — интервал и $\gamma\colon I \times J \to \mathbb{R}^2$ — гладкое отображение. Докажите, что огибающая E семейства γ_t совпадает с образом множества критических точек при отображении γ.