КВАДРАТИЧНЫЕ АЛГЕБРЫ

ЗАДАЧИ ПО МИНИКУРСУ, ЧАСТЬ I

0. Приведите пример двустороннего идеала в свободной ассоциативной алгебре $k\{x,y\}$ (с двумя образующими x и y над полем k), который не порождается (как двусторонний идеал) никаким конечным множеством своих элементов.

1. Постройте базисы в следующих ассоциативных алгебрах, заданных образующими и соотношениями над полем k:
а) $k\{x,y\}/(x^2)$; б) $k\{x,y\}/(xy,\ x^2)$; в) $k\{x,y\}/(xy-y^2,\ yx-x^2)$; г) $k\{x,y\}/(x^2-y^2)$; д) $k\{x,y\}/(xy-x,\ yx-y)$; е) $k\{x,y\}/(xy-x-1,\ yx-y)$; ж) $k\{x,y\}/(xy-y,\ yx-y)$; з) $k\{x,y\}/(xy-y-1,\ yx-y)$.

2. Выпишите образующие и соотношения, задающие алгебры, квадратично двойственные к следующим алгебрам:
а) $k\{x,y\}/(x^2,y^2)$; б) $k\{x,y\}/(xy,\ yx+y^2)$; в) $k\{x,y\}/(xy-yx-y^2)$; г) $k\{x,y\}/(xy-qyx)$, где $q\in k^*$.

3. а) Для любых двух положительно градуированных алгебр $A=k\oplus A_1\oplus A_2\oplus A_3\oplus\cdots$ и $B=k\oplus B_1\oplus B_2\oplus B_3\oplus\cdots$ положительно градуированная алгебра $A\sqcap B$ задается правилами $(A\sqcap B)_i=A_i\oplus B_i$ при $i>0$ и $(A\sqcap B)_0=k$. Покажите, что если A и B — квадратичные алгебры $A=\{V,R\}$ и $B=\{U,S\}$, то $A\sqcap B$ — квадратичная алгебра $\{V\oplus U,\ R\oplus(V\otimes U)\oplus(U\otimes V)\oplus S\}$.

б) Дайте какое-нибудь строгое определение положительно градуированной алгебры $A\sqcup B$, свободно порожденной положительно градуированными алгебрами A и B. Пользуясь этим определением, докажите следующие утверждения. Если A и B — квадратичные алгебры $A=\{V,R\}$ и $B=\{U,S\}$, то $A\sqcup B$ — квадратичная алгебра $\{V\oplus U,\ R\oplus S\}$. Обозначая для любой положительно градуированной алгебры A (с конечномерными компонентами) через $A(z)$ ряд Гильберта $\sum_{n=0}^\infty(\dim A_n)z^n$ алгебры A, покажите, что ряд Гильберта алгебры $A\sqcup B$ равен $\frac{1}{1/A(z)+1/B(z)-1}$.

в) Покажите, что для любых двух квадратичных алгебр A и B имеется естественный изоморфизм квадратичных алгебр $(A\sqcap B)^! = A^!\sqcup B^!$.

4. Для любых двух положительно градуированных алгебр A и B и константы $q\in k$ положительно градуированная алгебра $A\otimes^q B$ представляет собой структуру ассоциативной алгебры на градуированном тензорном произведении $(A\otimes B)_n=\bigoplus_{i+j=n}A_i\otimes B_j$ градуированных векторных пространств A и B с умножением, задаваемым правилом $(a'\otimes b')(a''\otimes b'')=q^{|b'||a''|}(a'a''\otimes b'b'')$, где $a''\in A_{|a''|}$ и $b'\in B_{|b'|}$.

а) Придайте смысл этому определению при $q=\infty$ и покажите, для любых квадратичных алгебр A, B и $q\in\mathbb{P}^1(k)$ алгебра $A\otimes^q B$ квадратична.

б) Покажите, что для любых двух квадратичных алгебр A и B имеется естественный изоморфизм квадратичных алгебр $(A\otimes^q B)^! = A^!\otimes^{-q^{-1}} B^!$.

5. Произведением Сегре двух положительно градуированных алгебр A и B называется положительно градуированная алгебра $A\circ B$ с компонентами $(A\circ B)_n = A_n\otimes B_n$ и естественным умножением.

а) Покажите, что произведением Сегре двух квадратичных алгебр $\{V,R\}$ и $\{U,S\}$ является квадратичная алгебра $\{V\otimes U,\ R\otimes U^{\otimes 2}+V^{\otimes 2}\otimes S\}$ (где подразумевается естественный изоморфизм $V^{\otimes 2}\otimes U^{\otimes 2}=(V\otimes U)^{\otimes 2}$).

б) Покажите, что для любых квадратичных алгебр A и B имеется естественный изоморфизм $(A\circ B)^! = A^!\bullet B^!$, где квадратичная алгебра $A\bullet B$ определяется правилом $\{V,R\}\bullet\{U,S\}=\{V\otimes U,\ R\otimes S\}$.

6. Подалгеброй Веронезе степени $d\ge 1$ положительно градуированной алгебры A называется положительно градуированная алгебра $A^{(d)}$ с компонентами $A^{(d)}_n = A_{nd}$.

а) Покажите, что если алгебра A порождена A_1 и задана соотношениями степени $\le d+1$, то алгебра $A^{(d)}$ квадратична.

б) Пусть A – свободная ассоциативная алгебра с двумя образующими x и y в градуировках 1 и 2, т. е. $x\in A_1$ и $y\in A_2$. Покажите, что алгебра $A^{(2)}$ не допускает конечного множества образующих (порождающих) элементов.

7. Для любых положительно градуированных алгебр A и B, универсальной кодействующей из A в B называется такая положительно градуированная алгебра $\mathrm{cohom}(A,B)$, что для любой положительно градуированной алгебры X имеется естественная биекция между гомоморфизмами градуированных алгебр $A\longrightarrow X\circ B$ и гомоморфизмами градуированных алгебр $\mathrm{cohom}(A,B)\longrightarrow X$.

а) Покажите, что если алгебра A квадратична, то

$$\mathrm{cohom}(A,B) = (A^!\circ \mathrm{quadr}\,B)^! = A\bullet(\mathrm{quadr}\,B)^!,$$

где $\mathrm{quadr}\,B$ обозначает универсальный объект в категории квадратичных алгебр, снабженных гомоморфизмом в B.

б*) Предполагая, что алгебра A задана однородными образующими и соотношениями (а компоненты алгебры B известны), задайте алгебру $\mathrm{cohom}(A,B)$ образующими и соотношениями.

Леонид Посицельский, НИУ-ВШЭ
E-mail address: posic@mccme.ru