КВАДРАТИЧНЫЕ АЛГЕБРЫ

ЗАДАЧИ ПО МИНИКУРСУ, ЧАСТЬ II

0. а) Пусть A — квадратичная алгебра, $A^!$ — двойственная к ней квадратичная алгебра, $e \in A_1 \otimes A_1^!$ — элемент следа $e = \sum_i x_i \otimes x_i^*$, где x_i — базис в A_1, x_i^* — двойственный базис в $A_1^* = A_1^!$. Покажите, что $e^2 = 0$ в $A \otimes A^!$.

б) Пусть $A = k \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus \cdots$ и $B = k \oplus B_1 \oplus B_2 \oplus B_3 \oplus \cdots$ — две положительно градуированные ассоциативные алгебры. Пусть $t \in A_1 \otimes B_1$ — такой элемент, что $t^2 = 0$ в $A \otimes B$. Обозначим через $q\colon \operatorname{quadr} A \longrightarrow A$ универсальный гомоморфизм в алгебру A из квадратичной алгебры. Покажите, что существует единственный гомоморфизм градуированных алгебр $f_t\colon (\operatorname{quadr} A)^! \longrightarrow B$, такой что $t = (q \otimes f_t)(e)$, где $q \otimes f_t\colon (\operatorname{quadr} A) \otimes (\operatorname{quadr} A)^! \longrightarrow A \otimes B$.

в) Пусть $K(A, B^*)$ обозначает градуированное векторное пространство $A \otimes B^*$, снабженное дифференциалом $\partial = r_t$, доставляемым действием элемента $t \in A_1 \otimes B_1$ на правом $A \otimes B$-модуле $A \otimes B^*$. Покажите, что если комплекс Кошуля $K(A, B^*)$ точен, т. е. $H_* K(A, B^*) = k$, то алгебры A и B квадратичны и гомоморфизм $f_t\colon (\operatorname{quadr} A)^! \longrightarrow B$ является изоморфизмом. (Таким образом, обе алгебры A и B в этом случае кошулевы.)

1. Проверьте, что третья градуировочная компонента
$$0 \longrightarrow A_3^{!*} \longrightarrow A_1 \otimes A_2^{!*} \longrightarrow A_2 \otimes A_1^{!*} \longrightarrow A_3 \longrightarrow 0$$
комплекса Кошуля $K(A, A^{!*})$ точна для любой квадратичной алгебры A.

2. а) Покажите, что для любой кошулевой алгебры A выполнено тождество для рядов Гильберта $A(z) = \sum_{i=0}^{\infty} (\dim A_i) z^i$ и $A^!(z)$ алгебры A и квадратично двойственной алгебры $A^!$:
$$A(z) A^!(-z) = 1.$$

б) Покажите, что если ряд Гильберта квадратичной алгебры A имеет вид $A(z) = 1/p(z)$, где $p(z)$ — многочлен степени ≤ 2, то алгебра A кошулева.

в) Проверьте на кошулевость квадратичные алгебры а)–г) из задачи 2 листка I.

3. а) Пользуясь определением кошулевости в терминах дистрибутивных решеток, покажите, что для любых кошулевых алгебр A, B и любого $d \ge 1$ алгебры A^{opp}, $A^!$, $A \sqcup B$, $A \sqcap B$, $A \otimes^0 B$, $A \circ B$, $A \bullet B$ и $A^{(d)}$ кошулевы.

б*) Пользуясь какими-нибудь гомологическими средствами, покажите, что алгебра $A \otimes^q B$ кошулева для любых кошулевых алгебр A, B и $q \in \mathbb{P}^1(k)$.

4. Выпишите минимальные свободные резольвенты и вычислите векторные пространства: а) $\mathrm{Ext}^{ij}_{k[x]}(k,k)$, б) $\mathrm{Ext}^{ij}_{k[x]}(k[x]/(x^n),k)$, в) $\mathrm{Ext}^{ij}_{k[x]/(x^m)}(k,k)$, г) $\mathrm{Ext}^{ij}_{k[x]/(x^m)}(k[x]/(x^n),k)$ для всех $m \geq n \geq 1$ и i, $j \geq 0$.

5. Ext по Ионеде.

а) Пользуясь определением групп Ext между левыми модулями над ассоциативным кольцом R в терминах проективных резольвент первого аргумента, постройте естественный изоморфизм $\mathrm{Ext}^0_R(L,M) = \mathrm{Hom}_R(L,M)$.

б) Для любых левых R-модулей L, M и $n \geq 1$, определим $YoExt^n_R(L,M)$ как множество классов эквивалентности точных последовательностей левых R-модулей

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_n \longrightarrow L \longrightarrow 0.$$

Отношение эквивалентности определяется как минимальное симметричное и транзитивное отношение, содержащее следующие элементарные эквивалентности: точные последовательности $M \longrightarrow X_\bullet \longrightarrow L$ и $M \longrightarrow Y_\bullet \longrightarrow L$ считаются эквивалентными, если существует гомоморфизм комплексов $X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$, индуцирующий тождественные отображения на L и M. Постройте естественное отображение $\mathrm{Ext}^n_R(L,M) \longrightarrow YoExt^n_R(L,M)$.

в) Покажите, что построенное отображение является биекцией для всех L, M и $n \geq 1$. Определите операции сложения и вычитания на элементах $YoExt^n_R(L,M)$ так, чтобы они соответствовали имеющимся операциям на $\mathrm{Ext}^n_R(L,M)$.

г) Определим композиционное умножение на $YoExt_R(L,M)$ следующим образом: произведение двух последовательностей $M \longrightarrow X_\bullet \longrightarrow L$ и $N \longrightarrow Y_\bullet \longrightarrow M$ есть последовательность $N \longrightarrow Y_\bullet \longrightarrow X_\bullet \longrightarrow L$. Покажите, что так получается ассоциативная, дистрибутивная относительно сложения операция умножения $YoExt^m_R(L,M) \times YoExt^n_R(M,N) \longrightarrow YoExt^{n+m}_R(L,N)$ для n, $m \geq 1$.

д) Доопределите построенную операцию умножения, распространив ее область определения на случай n, $m \geq 0$ (считая, по определению, что $YoExt^0_R(L,M) = \mathrm{Hom}_R(L,M)$ есть группа всех гомоморфизмов R-модулей $L \longrightarrow M$).

е) Покажите, что построенное в пункте б) (биективное, согласно пункту в)) отображение $\mathrm{Ext}^n_R(L,M) \longrightarrow YoExt^n_R(L,M)$ согласовано с умножениями.

ж) Объясните, как вводить дополнительную (вторую) градуировку на $YoExt_R(L,M)$ в случае, когда кольцо R и R-модули L, M градуированы.

6. Пользуясь определением Ext по Ионеде и/или подходящими проективными резольвентами, вычислите биградуированные Ext-алгебры: а) $\mathrm{Ext}^{*,*}_{k[x]}(k,k)$, б) $\mathrm{Ext}^{*,*}_{k[x]/(x^2)}(k,k)$, в) $\mathrm{Ext}^{*,*}_{k[x]/(x^m)}(k,k)$ для $m \geq 3$.

Леонид Посицельский, НИУ-ВШЭ
E-mail address: posic@mccme.ru