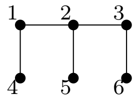
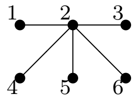
I Курс. Задание по дискретной математике №2

Дата выдачи 25 апреля 2012 Срок сдачи 30 мая 2012

1. *(0.5 балла)* Выпишите коды Прюфера помеченных деревьев





2. *(0.5 балла)* Нарисуйте помеченные деревья, коды Прюфера которых равны
   а) $x_2x_3x_4x_5$; **б)** $x_3x_4x_3x_4$.

3. *(1 балл)* Найдите число помеченных деревьев с n вершинами, в которых валентность вершины с номером 1 равна k, $k = 1, 2, \dots, n-1$

4. *(0.5 балла)* Докажите, что из чисел Гурвица $h_{m,\mu}$ с данным разбиением μ либо все числа с четным значением m, либо все числа с нечетным значением m равны нулю.

5. Вычислите числа Гурвица

   а) *(1.5 балла)* $h^{\circ}_{m;\,1^3 2^1}$, $h^{\circ}_{m;\,2^1 3^1}$, $h^{\circ}_{m;\,1^1 4^1}$ $\forall m$;

   б) *(2 балла)* $h_{m;\,2^1 3^1}$ $\forall m$; **в)** *(2 балла)* $h_{m;\,1^2 2^1}$ $\forall m$.

6. Напомним что, присвоив переменной p_i вес i $(i = 1, 2, \dots)$, производящую функцию для простых чисел Гурвица $H^{\circ}(u; p_1, p_2, \dots)$ можно представить в виде суммы $H^{\circ} = H^{\circ}_0 + H^{\circ}_1 + H^{\circ}_2 + \dots$, где $H^{\circ}_k = H^{\circ}_k(u; p_1, p_2, \dots)$ — сумма мономов веса k в H°.

   а) *(1 балл)* Вычислите младшие весовые компоненты функции Гурвица H°_k, $k = 0, 1, 2, 3$. Выпишите уравнения транспозиции для этих компонент и убедитесь в их справедливости.

   б) *(1 балл)* Воспользовавшись уравнением транспозиции, вычислите первые 4 члена разложения функции $H^{\circ}(u; p_1, p_2, \dots)$ в ряд по u.

7. *(1 балл)* Докажите, что экспоненциальная производящая функция для числа корневых помеченных деревьев $Y(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{n-1} \frac{s^n}{n!}$ и экспоненциальная производящая функция для числа помеченных деревьев с двумя корнями $Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^n \frac{s^n}{n!}$ связаны соотношением

$$Z(s) = \frac{Y(s)}{1 - Y(s)}.$$

8. Рассмотрим лес $\mathcal{F}$, состоящий из ℓ деревьев (компонент связности) и имеющий N вершин. Пусть $c_1, c_2, \dots, c_\ell$ – количество вершин в деревьях леса (так что $\sum_{i=1}^{\ell} c_i = N$).

   а) *(2.5 балла)* Докажите, что количество деревьев, построенных на том же множестве из N вершин и содержащих лес $\mathcal{F}$, равно $N^{\ell-2} \prod_{i=1}^{\ell} c_i$.

   б) *(1 балл)* Докажите, что количество k-компонентных *корневых* лесов, построенных на том же множестве из N вершин и содержащих лес $\mathcal{F}$, равно $N^{\ell-k} \binom{\ell-1}{\ell-k} \prod_{i=1}^{\ell} c_i$. (Корневым называется лес, в котором выделены корневые вершины у каждой из его компонент).

   в) *(3 балла)* Для данного графа $\mathcal{G}$ с N вершинами определим могочлен

$$P(\mathcal{G}, x) = \sum_{\mathcal{F}} x^{\ell(\mathcal{F})-1},$$

   где сумма берется по всем корневым лесам, построенным на том же множестве из N вершин, что и граф $\mathcal{G}$ и содержащимся в нем; $\ell(\mathcal{F})$ – число компонент связности леса $\mathcal{F}$.

   Обозначим $\overline{\mathcal{G}}$ — граф, являющийся *дополнением* $\mathcal{G}$ до полного графа (дополнительный граф $\overline{\mathcal{G}}$ строится на том же множестве вершин, что и граф $\mathcal{G}$, и пара вершин i и j соединены в дополнительном графе ребром тогда и только тогда, когда между ними нет ребра в $\mathcal{G}$).

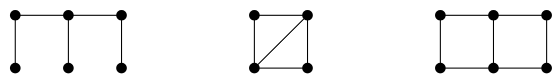
Докажите что
$$P(\overline{\mathcal{G}}, x) \;=\; (-1)^{N-1}\, P(\mathcal{G}, -x-N)\,.$$

В частности, число *остовных* деревьев графа $\overline{\mathcal{G}}$ дается формулой $(-1)^{N-1}P(\mathcal{G}, -N)/N$.

[**Указание.** Используйте результат предыдущего пункта задачи и принцип включения-исключения.]

9. *(1 балл)* Докажите, что модуль значения хроматического многочлена в точке -1 равен числу ациклических ориентаций графа.

   Следующие пять задач относятся к следующим графам:

10. *(0.5 балла)* Сколько существует правильных раскрасок графов с рисунка в 5 цветов?

11. *(0.5 балла)* Сосчитайте размерность пространства эйлеровых подграфов, являющихся одновременно коциклами, для графов с рисунка.

12. *(0.5 балла)* Сосчитайте сложность (число остовных деревьев) для графов с рисунка.

13. *(0.5 балла)* Сосчитайте число всюду ненулевых потоков над $\mathbb{Z}_m$ в графах с рисунка. Для каждого из графов приведите пример такого потока над $\mathbb{Z}_4$ (если он существует).

14. *(0.5 балла)* Сосчитайте число совершенных паросочетаний в графах с рисунка.

15. *(3 балла)* Пусть $f_k(n)$ — число замощений прямоугольной области на шахматной доске размером $k \times n$ клеток с помощью $\frac{1}{2}kn$ доминошек (каждая доминошка покрывает две соседних клетки доски). Очевидно, $f_k(n) = 0$ при нечетном kn, $f_1(2n) = 1$, $f_2(n) = f_2(n-1) + f_2(n-2)$ – последовательность чисел Фибоначчи. Зафиксируем k и построим производящую функцию последовательности $f_k(n)$: $F_k(s) = \sum_{n\geq 0} f_k(n)s^n$. Докажите, что функция $F_k(s)$ рациональна. Найдите $F_k(s)$ при $k = 2, 3, 4$.

16. Рассмотрим язык, состоящий из слов вида $a^n b^n c^n \;\; \forall n \geq 0$.

    а) *(0.5 балла)* Можно ли распознать этот язык с помощью конечного автомата?

    б) *(2 балла)* Можно ли распознать этот язык, используя автомат со стеком?

    в) *(3 балла)* Докажите, что не существует контекстно-свободной грамматики, в которой были бы выводимы слова этого языка, и только они.

    [**Указание.** Докажите утверждение о том, что в произвольной контекстно-свободной грамматике для любого достаточно длинного слова x, выводимого в этой грамматике, существует такое его представление в виде $x = abcdf$, что все слова вида $a\, b^n c\, d^n f \;\; \forall n \geq 1$ также выводимы в этой грамматике.]