Математический анализ

С.М.Натанзон

Contents

1. Последовательности чисел

1.1. **Вещественные числа.** Определение вещественного числа основано на определении рационального числа (т.е m/n, где m и n принадлежат множеству $\mathbb{Z}$ целых чисел). Рациональным числом является, в частности, конечная десятичная дробь

$$C_0, C_1C_2 \dots C_k = \sigma(C_0)(|C_0| + C_1 \cdot 10^{-1} + \dots + C_k \cdot 10^{-k}),$$

где здесь и далее $C_0 \in \{\pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, $\sigma(C_0)$ — знак числа C и $C_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$.

Определение 1.1. *Десятичной дробью называется конечная или бесконечная последовательность* $C = C_0, C_1C_2 \dots$. *Бесконечные десятичные дроби* $C_0, C_1C_2 \dots C_k 99 \dots$ *(где* $C_k \neq 9$*) и* $C_0, C_1C_2 \dots C_{k-1}(C_k + 1)00 \dots$ *считаются эквивалентными конечной десятичной дроби* $C_0, C_1C_2 \dots C_{k-1}(C_k + 1)$. *Дроби* $+0$ *и* -0 *считаются эквивалентными числу* 0. *Класс эквивалентности десятичных дробей называется* вещественным числом. *Вещественное число C называется положительным ($C>0$) или отрицательным ($C<0$) в зависимости от знака числа* C_0. *Множество вещественных чисел обозначается* $\mathbb{R}$.

Далее, если не оговорено противное, под *числом* понимается вещественное число. Под *десятичной дробью*, представляющей число C, мы будем понимать дробь $C = C_0, C_1C_2 \dots$ не оканчивающуюся на $99\dots$.

Десятичной последовательностью вещественного числа C представленного десятичной дробью $C_0, C_1C_2 \dots$ называется бесконечная последовательность $q_0, q_1, q_2, \dots$, где $q_k = C_0, C_1C_2 \dots C_k$. Число с десятичной последовательностью $\{-q_k | k = 0, 1, 2 \dots\}$ обозначается $-C$.

Множество вещественных чисел обозначается $\mathbb{R}$ называют также *числовой прямой*, а числа — *точками числовой прямой.* Упорядочение рациональных чисел порождает упорядочение вещественных чисел следующим образом. Пусть ε — положительное вещественное число и $\tilde{r}$, r — вещественные числа с десятичными последовательностями $\{\tilde{q}_k\}$ и $\{q_k\}$ соответственно. Мы считаем, что $\tilde{r} - r < \varepsilon$, если $\tilde{r} = r$ или, если существует конечная десятичная дробь δ из десятичной последовательности числа ε такая, что $\tilde{q}_k - q_k < \delta$ для всех k, начиная с некоторого n.

Неравенство $c < d$ означает $c - 0 < d$, если d — неотрицательно и $-d - 0 < -c$, если d — неположительно. Неравенство $d > c$ означает $c < d$. Неравенство $\tilde{r} - r < \tilde{r}' - r'$ означает, что $\tilde{r} - r < \varepsilon < \tilde{r}' - r'$ для некоторого числа ε. Неравенство $|\tilde{r} - r| < \varepsilon$ означает, что $\tilde{r} - r < \varepsilon$ и $r - \tilde{r} < \varepsilon$.

Множество $(a, b) = \{r \in \mathbb{R} |\ a < r < b\}$ называется *интервалом* с концами a и b. Множество $[a, b] = \{r \in \mathbb{R} |\ a \leq r \leq b\} = \{a\} \cup (a, b) \cup \{b\}$ называется *отрезком* с концами a и b. Положим также $[a, b) = \{a\} \cup (a, b)$ и $(a, b] = (a, b) \cup \{b\}$

Перейдем теперь к определению операций между вещественными числами.

1.2. **Последовательности Коши.**

Определение 1.2. *Последовательность вещественных чисел* $r_1, r_2, \ldots$ *называется последовательностью Коши, если*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \forall i, j > n:\ |r_i - r_j| < \varepsilon.$$

Задача 1.1. *Докажите, что бесконечная десятичная последовательность вещественного числа является последовательностью Коши.*

Лемма 1.1. *Пусть* $a = (a_1, a_2, \ldots)$ *и* $b = (b_1, b_2, \ldots)$ *— последовательности Коши, состоящии из рациональных чисел. Тогда последовательности* $(a+b) = ((a_1+b_1), (a_2+b_2), \ldots)$, $(-a) = ((-a_1), (-a_2), \ldots)$ *и* $(ab) = ((a_1b_1), (a_2b_2), \ldots)$ *— тоже последовательности Коши. Если* $|a_i| > M > 0$ *для всех* i, *то* $a^{-1} = (a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots)$ *— тоже последовательность Коши.*

Proof. По условию

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \forall i, j > n: |a_i - a_j| < \frac{\varepsilon}{2},\ |b_i - b_j| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но тогда $|(a_i + b_i) - (a_j + b_j)| = |(a_i - a_j) + (b_i - b_j)| \leq |a_i - a_j| + |b_i - b_j| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Остальные доказательства строятся аналогично. $\square$

Задача 1.2. *Дать подробное доказательство всех утверждений леммы 1.1*

Задача 1.3. *Построить пример, когда* $|a_i| > 0$ *для всех* i, *но последовательность* $a^{-1} = (a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots)$ *не является последовательностью Коши.*

Далее, если не оговорено противное, под последовательностью понимается бесконечная последовательность вещественных (не обязательно рациональных) чисел.

Определение 1.3. *Последовательности* $r = (r_1, r_2, \ldots)$ *и* $r' = (r'_1, r'_2, \ldots)$ *называются эквивалентными* ($r \sim r'$), *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* n *такое, что для любого* $i > n$ *выполнено неравенство* $|r_i - r'_i| < \varepsilon$.

Далее вместо условий такого типа мы будем писать формулу

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \forall i > n:\ |r_i - r'_i| < \varepsilon,$$

используя стандартные кванторы $\forall$ — любой, $\exists$ — существует и символ $\mathbb{N}$ для множества натуральных чисел.

Задача 1.4. *Докажите, что если* $r \sim r'$ *и* $r' \sim r''$, *то* $r \sim r''$.

Задача 1.5. *Докажите, что несовпадающим вещественным числам отвечают неэквивалентные десятичные последовательности.*

Задача 1.6. *Докажите, что последовательность эквивалентная последовательности Коши сама является последовательностью Коши.*

Теорема 1.1. *Всякая последовательность Коши* $r = (r_1, r_2, \ldots)$ *эквивалентна десятичной последовательности вещественного числа.*

Для доказательства нам понадобятся еще одно определение и две леммы. Пусть $r = (r_1, r_2, \dots)$ — последовательность Коши. Отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ назовем *тяжелым*, если он содержит бесконечно много элементов последовательности r.

Лемма 1.2. *Если $[a, b]$ и $[c, d]$ — тяжелые отрезки, то $[a, b] \cap [c, d] \neq \varnothing$.*

Proof. Предположим, что $b < c$. Тогда

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists i, j > n\ : r_i \in [a, b], r_j \in [c, d]$$

откуда $|r_i - r_j| > c - b$. Но это противоречит определению последовательности Коши. $\square$

Лемма 1.3. *Если $[a, b]$ и $[b, c]$ — тяжелые отрезки, то последовательность r эквивалентна десятичной последовательности числа b.*

Proof. Пусть $(b_1, b_2, \dots)$ — десятичная последовательность числа b. Положим $b' = b'_n = b_n - 10^{-n-1}$ и $b'' = b''_n = b_n + 10^{-n} - 10^{-n-1}$. Тогда существует $\tilde{n}$ такое, что при $n > \tilde{n}$ выполнены неравенства $a < b' < b < b'' < c$. Зафиксируем произвольное n, удовлетворяющее этим условиям. В этом случае согласно лемме 1.2 в каждой из пар отрезков $([a, b'], [b, b''])$, $([b', b], [b'', c])$, $([a, b'], [b'', c])$ содержится не более одного тяжелого отрезка. Кроме того, каждая из пар $([a, b'], [b', b])$ и $([b, b''], [b'', c])$ содержит не менее одного тяжелого отрезка. Следовательно, $[a, b']$ и $[b'', c]$ — легкие отрезки. Таким образом, существует $L > n$ такое, что $r_i \in [b', b'']$ при $i > L$, и, значит, $|r_i - b_i| < |b' - b''| = 10^{-n}$. $\square$

Доказательство теоремы 1.1. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ разобьем $\mathbb{R}$ на отрезки $[q \cdot 10^{-n}, (q + 1) \cdot 10^{-n}]$, где $q \in \mathbb{Z}$. Если одно из разбиений содержит два тяжелых отрезка, то по леммам 1.2 и 1.3 они имеют общую точку и ее десятичная последовательность эквивалентна последовательности $\{r_i\}$. В противном случае тяжелые отрезки образуют вложенную последовательность $[q_0, q_0 + 1]$, $[q_1 \cdot 10^{-1}, (q_1 + 1) \cdot 10^{-1}]$, $\dots$ Но тогда $\{r_i\} \sim \{q_i \cdot 10^{-i}\}$, поскольку $\forall j,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \forall i > n\ :\ r_i, q_i \cdot 10^{-i} \in [q_j \cdot 10^{-j}, (q_j + 1) \cdot 10^{-j}]$. С другой стороны, последовательность $\{q_i \cdot 10^{-i}\}$ является десятичной последовательностью некоторого числа. $\square$

Используем теперь последовательности из вещественных чисел для определения операций между ними.

Определение 1.4. *Пусть a, b — вещественные числа и $\{a_i\}, \{b_i\}$ — их десятичные последовательности. Как следует из задачи 1.1 и леммы 1.1, $\{a_i + b_i\}$ и $\{a_i b_i\}$— последовательности Коши. Согласно теореме 1.1, они эквивалентны десятичным последовательностям некоторых чисел $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Они определены однозначно согласно задаче 1.5. Положим $a + b = c_1$ и $ab = c_2$.*

Задача 1.7. *Докажите, что $\mathbb{R}$ — поле (докажите, в частности, что $a(b + c) = ab + ac$).*

Задача 1.8. *Докажите, что лемма 1.1 верна для произвольных (не обязательно рациональных) последовательностей Коши.*

1.3. **Пределы последовательностей.**

Определение 1.5. *Говорят, что последовательность* $a_1, a_2, \dots$ *имеет предел* a *или сходится к* a, *если*
$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall i > n : |a_i - a| < \varepsilon.$
В этом случае пишут $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = a$ *или* $a_i \to a$.

Задача 1.9. *Десятичная последовательность числа сходится к этому числу.*

Задача 1.10. *Докажите, что всякая последовательность имеет не более одного предела и если он существует, то любая ее бесконечная подпоследовательность имеет тот же самый предел.*

Теорема 1.2. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.

Proof. По условию $\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n > m : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Значит, при $n > m$ мы имеем $|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$. □

Задача 1.11. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. *Докажите, что* $\lim\limits_{n\to\infty}(-a_n) = -a$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{-1} = a^{-1}$, *если* $a_n \ne 0$, $a \ne 0$.

Лемма 1.4. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ *и* $a_n \ge b_n$. *Тогда* $a \ge b$.

Proof. Предположим, что $a < b$. Положим $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Тогда

$$\exists m \in \mathbb{N}, \forall n > m : |a_n - a| < \varepsilon, |b_n - b| < \varepsilon.$$

Таким образом, $a_n < \frac{a+b}{2} < b_n$, что противоречит условию леммы. □

Задача 1.12. *Докажите, что эквивалентные последовательности или обе не имеют предела, или имеют одинаковый предел.*

Теорема 1.3 (критерий Коши)**.** *Последовательность* $a_1, a_2, \dots$ *имеет предел, если и только если она является последовательностью Коши.*

Proof. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тогда $\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n > m : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, если $i, j > m$, то $|a_i - a_j| = |(a_i - a) + (a - a_j)| \le |a_i - a| + |a_j - a| < \varepsilon$. т.е. $a_1, a_2, \dots$ — последовательность Коши. Обратно: если $a_1, a_2, \dots$ последовательность Коши, то согласно теореме 1.1 она эквивалентна десятичной последовательности некоторого числа и сходится к этому числу согласно задаче 1.9. □

Теорема 1.4 (теорема Больцано-Вейерштрасса)**.** *Из всякой (бесконечной) последовательности на отрезке можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к точке этого отрезка .*

Proof. Пусть $r_1, r_2, \dots \in [a, b] = I_1$. Поделим I_1 на равные отрезки $[a, b_1]$ и $[b_1, b]$. Один из них (назовем его I_2) содержит бесконечное число элементов последовательности. Разделим теперь его пополам В результате мы получим бесконечную последовательность вложенных отрезков $I_1, I_2, \dots$, длина которых равна $\frac{b-a}{2^{i-1}}$ и стремится к нулю. Каждый из них содержит бесконечное число точек последовательности. Возьмем из каждого отрезка по одной точке $c_i \in I_i$. Тогда $|c_i - c_j| < \frac{(b-a)}{2^{m-1}}$ при $i, j > m$. Следовательно, согласно критерию Коши последовательность $c_1, c_2, \dots$ имеет предел. Если этот предел c не принадлежит $[a, b]$, например $c > b$, то $c_i > b$, начиная с некоторого i, что невозможно. □

Задача 1.13. *Останется ли утверждение теоремы верным, если заменить "отрезок" на "интервал".*

Задача 1.14. *Докажите, что из любого покрытия отрезка интервалами можно выбрать конечное подпокрытие.*

Определение 1.6. *Подмножество $I \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным (соответственно, ограниченным сверху или ограниченным снизу), если существует такое число $M \in \mathbb{R}$ такое, что $|I| < M$ (соответственно $I < M$, $M < I$).*

Определение 1.7. *Последовательность $a_1, a_2, \dots$ называется монотонно возрастающей, если $\forall i \in \mathbb{N} : a_{i+1} \geq a_i$, и монотонно убывающей, если $\forall i \in \mathbb{N} : a_{i+1} \leq a_i$. Последовательность называется монотонной, если она либо монотонно возрастающая либо монотонно убывающая. Если, коме того все члены последовательности различны, то последовательность называются строго монотонно возрастающей, строго монотонно убывающей и строго монотонной соответственно.*

Задача 1.15. *Докажите, что ограниченная монотонная последовательность имеет предел.*

Задача 1.16. *Докажите, что последовательность $e_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ ограниченна и монотонна. Ее предел обозначается буквой e.*

Определение 1.8. *Говорят, что последовательность $a_1, a_2, \dots$ стремится к $+\infty$, если $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, \forall i > n : a_i > A$. Обозначение $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = +\infty$ или $a_i \to +\infty$. Равенство $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = -\infty$ означает, что $\lim\limits_{i\to\infty}(-a_i) = +\infty$.*

Задача 1.17. *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c \in \mathbb{R}$. Докажите, что 1)$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + c_n) = +\infty$; 2)$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n c_n) = +\infty$, если $c > 0$; 3)$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n^{-1}) = 0$; 4)$\lim\limits_{n\to\infty}(c_n^{-1}) = +\infty$, если $c = 0$ и $c_n > 0$. Что можно сказать о пределах последовательностей $(a_n - b_n)$ и $\frac{a_n}{b_n}$?*

2. Непрерывность и дифференцируемость

2.1. **Пределы функций.** Интервал, содержащий точку называется *окрестностью точки $c \in \mathbb{R}$*. Окрестность точки c без самой точки c называется *проколотой окрестностью.*

Функцией f на подмножестве $I \subset \mathbb{R}$ называют отображение $f \colon I \to \mathbb{R}$. В этом случае говорят также, то I — *область определения функции f.*

Определение 2.1. *Пусть I пересекается со всеми проколотыми окрестностями точки c. Говорят, что "функция f стремится к l при x, стремящемся к c" или "l — предел f в точке c", и пишут $\lim\limits_{x\to c} f(x) = l$, если*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, (x \in I, 0 < |x - c| < \delta) \colon |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Теорема 2.1. *Пусть область определения I функции f пересекается со всеми проколотыми окрестностями точки c. Тогда $\lim\limits_{x\to c} f(x) = l$, если и только если $\lim\limits_{i\to\infty} f(c_i) = l$ для любой последовательности $c_i \subset I \setminus c$ сходящейся к c.*

Proof. Пусть $\lim\limits_{x\to c} f(x) = l$ и последовательность $\{c_i\} \subset I$, сходится к c. Тогда, ввиду сходимости последовательности $\forall\ \delta > 0,\ \exists\ n,\ \forall m > n\colon |c_n - c| < \delta$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и, использую существование предела функции, выберем $\delta > 0$ таким образом, чтобы $\forall\,(x \in I, 0 < |x - c| < \delta)\colon |f(x) - l| < \varepsilon$. Следовательно $|f(c_m) - l| < \varepsilon$ при $m > n$.

Пусть теперь $\lim\limits_{i\to\infty} f(c_i) = l$ для любой последовательности $c_i \subset I$ сходящейся к c. Докажем, что $\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,\delta > 0,\ \forall\,(x \in I, 0 < |x-c| < \delta)\colon |f(x)-l| < \varepsilon$. Предположим, что это не так. Тогда $\exists\ \varepsilon > 0,\ \forall\ \delta > 0,\ \exists\,(x \in I, 0 < |x - c| < \delta)\colon |f(x) - l| > \varepsilon$. Рассмотрим сходящуюся к 0 последовательность δ_n. Согласно нашему предположению, существует последовательность $c_n \subset I$ такая, что $0 < |c_n - c| < \delta_n$ и $|f(c_n) - l| > \varepsilon$. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$, но $|f(c_n) - l| > \varepsilon$ и, в частности, $\lim\limits_{n\to\infty} f(c_n) \neq l$. Полученное противоречие доказывает нужное утверждение. □

Теорема 2.1 позволяет позволяет использовать утверждения, касающиеся пределов последовательностей чисел, для доказательства соответствующих утверждений про пределы функций. Из теоремы 1.2 следует, например

Следствие 2.1. *Если $\lim\limits_{x\to c} f_1(x) = l_1$ и $\lim\limits_{x\to c} f_2(x) = l_2$, то $\lim\limits_{x\to c}(f_1 + f_2)(x) = l_1 + l_2$.*

Задача 2.1. *Дайте необходимые определения,сформулируйте и докажите аналоги задач 1.10, 1.11, 1.17 и леммы 1.4 для пределов функций.*

Задача 2.2. *Докажите следующий критерий Коши для пределов функций. Пусть I пересекается со всеми проколотыми окрестностями точки c. Тогда функция f имеет предел при x, стремящемся к c если и только если $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0,\ \forall\,(x, x' \in I, 0 < |x - c| < \delta, 0 < |x' - c| < \delta)\colon |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.*

Лемма 2.1. *Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, причем $\exists\,\varepsilon_0 > 0,\ \forall\,(x \in I, 0 < |x-a| < \varepsilon_0)\colon f(x) \neq b$,. Пусть функции g определена в некоторой проколотой окрестностью точи b и $\lim\limits_{x\to b} g(x) = l$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = l$.*

Proof. Пусть $\epsilon > 0$. Тогда $\exists\,\tilde{\delta} > 0,\ \forall\,0 < |y - b| < \tilde{\delta}\colon |g(y) - l| < \epsilon$. Кроме того, $\exists\,0 < \delta < \epsilon_0,\ \forall\,(x \in I, 0 < |x - a| < \delta)\colon 0 < |f(x) - b| < \tilde{\delta}$ и, следовательно, $|g(f(x)) - l| < \epsilon$. □

Задача 2.3. *Что получится, если в лемме 2.1 убрать условие $\exists\varepsilon_0 > 0,\ \forall\,(x \in I, 0 < |x - a| < \varepsilon_0)\colon f(x) \neq b$*

Определение 2.2. *Говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$* эквивалентны *при $x \to x_0$, если в проколотой окрестности точки x_0 существует функция $h(x)$, такая что $f(x) = g(x)h(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = 1$. Эквивалентность обозначается $f \sim g$.*

Пример 2.1. *Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, $l \neq 0$, то $f \sim l$ при $x \to x_0$.*

Задача 2.4. *Докажите, что если $f_1 \sim f_2$ и $f_2 \sim f_3$, то $f_1 \sim f_3$.*

Задача 2.5. *Докажите, что* $\sin x \sim x$ *и* $\ln(1+x) \sim x$ *при* $x \to 0$.

Задача 2.6. *Пусть $f_1 \sim f_2$ и $g_1 \sim g_2$, при $x \to x_0$, причем $g_1 g_2 \neq 0$ в окрестности точки x_0. Докажите, что $f_1 g_1 \sim f_2 g_2$ и $\frac{f_1}{g_1} \sim \frac{f_2}{g_2}$ при $x \to x_0$. Верно ли, что $f_1 + g_1 \sim f_2 + g_2$?*

Определение 2.3. *Если $f \sim ax^n$ $(a \neq 0)$ при $x \to 0$, то говорят, что $f(x)$ есть бесконечно малая порядка n.*

Определение 2.4. *Обычно пишут "$f = o(g)$ при $x \to x_0$", если при $x \neq x_0$ $f(x) = g(x)h(x)$, где $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 0$. Аналогично пишут "$f = O(g)$ при $x \to x_0$", если $f(x) = g(x)h(x)$ при $x \neq x_0$, где функция $h(x)$ ограничена в проколотой окрестности точки x_0.*

Пример 2.2. *Выражение "$o(1)$ при $x \to x_0$" означает, что $o(1)$ — функция от x, стремящаяся к 0 при $x \to x_0$. Выражение "$O(1)$ при $x \to x_0$" означает, что $O(1)$ — функция от x, ограниченная в проколотой окрестности точки x_0*

Интервал с левым (соответственно правым) концом в точке c называется *левой (соответственно правой) проколотой окрестностью точки c.*

Определение 2.5. *Пусть I пересекается со всеми правыми проколотыми окрестностями точки c. Говорят, что "функция f стремится к l при x, стремящемся к c справа" или "l — правый предел f в точке c", и пишут $\lim\limits_{x \to c+0} f(x) = l$, если*
$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, (x \in I, 0 < x - c < \delta) \colon |f(x) - l| < \varepsilon.$

Определение 2.6. *Равенство $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ означает, что $I \cap \{x > N\} \neq \emptyset$ для всех положительных N и*
$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n > 0,\ \forall\, x > n \colon |f(x) - l| < \varepsilon.$
В этом случае говорят, что "f стремится к l при x стремящимся к $+\infty$".

Задача 2.7. *Дайте определения предела $\lim\limits_{x \to c-0} f(x) = l$ и предела $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$.*

Задача 2.8. *Сформулируйте и докажите для случай правых, левых и пределов при $x \to \pm\infty$ все доказанные утверждения о пределах функций.*

Задача 2.9. *Дайте определение монотонной функции и докажите, что монотонная ограниченная функция, определенная на интервале, имеет пределы справа и слева в каждой точке этого интервала.*

2.2. **Непрерывные функции.**

Определение 2.7. *Функция f, определенная на множестве $I \subset \mathbb{R}$, называется непрерывной в точке $x_0 \in I$, если*

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall\, (x \in I, |x - x_0| < \delta) \colon |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Задача 2.10. *Докажите, что если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, то функция f непрерывна в точке x_0. Докажите, что если функция f непрерывна в точке x_0 и область ее определения пересекает любую окрестность точки x_0, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Задача 2.11. *Докажите, что функция f, определенная на множестве $I \subset \mathbb{R}$, непрерывна в точке x_0, если и только если функция f переводит любую последовательность, принадлежащую I и сходящуюся к точке x_0, в последовательность, сходящуюся к $f(x_0)$.*

Определение 2.8. *Функция f называется непрерывной на множестве $I \subset \mathbb{R}$, если она непрерывна в каждой точке множества I.*

Задача 2.12. *Докажите, что суперпозиция, сумма, разность и произведение непрерывных функций f и g тоже непрерывны. Кроме того, если $g(x) \neq 0$, то непрерывна и функция $\frac{f(x)}{g(x)}$.*

Обозначим через $\sup(I)$ (читается супремум) наименьшее из чисел b таких, что $\forall\, x \in I\colon x \leq b$. Обозначим через $\inf(I)$ (читается инфинум) наибольшее из чисел a, таких что $\forall\, x \in I\colon a \leq x$.

Задача 2.13. *Пусть $I \subset \mathbb{R}$. Докажите, что* $\sup(I)$ *существует, если множество ограничено сверху и* $\inf(I)$ *существует если множество I ограничено снизу*

Задача 2.14. *Пусть множество $I \subset \mathbb{R}$ состоит из рациональных чисел. Может ли* $\sup(I)$ *или* $\inf(I)$ *быть иррациональным?*

Определение 2.9. *Пусть f — функция на I. Говорят, что f достигает максимума на I, если $\exists y \in I, \forall\, x \in I\colon f(x) \leq f(y)$. В этом случае пишут $f(y) = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Говорят, что f достигает минимума на I, если $\exists y \in I, \forall\, x \in I\colon f(x) \geq f(y)$. В этом случае пишут $f(y) = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.*

Теорема 2.2. *Непрерывная функция на отрезке $[a, b]$ достигает минимума и максимума.*

Proof. Пусть f — непрерывная функция на отрезке $[a, b]$. Докажем сначала, что функция f ограничена сверху. Предположим противное. Тогда $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, x_n \in [a, b]\colon f(x_n) > n$. В частности, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$. Согласно теореме Больцано-Вейерштрасса существует последовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots,$ имеющая предел $\lim\limits_{i\to\infty} x_{n_i} = x_0 \in [a, b]$. Следовательно, $f(x_0) = \lim\limits_{i\to\infty} f(x_{n_i}) = +\infty$,что невозможно.

Таким образом, множество $f([a, b])$ ограничено сверху и, согласно задаче 2.13, существует $M = \sup\limits_{x\in[a,b]}(f(x))$. По определению, это означает, что $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, x_n \in [a, b]\colon M - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq M$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = M$. Согласно теореме Больцано-Вейерштрасса, существует последовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots,$ имеющая предел $\lim\limits_{i\to\infty} x_{n_i} = x_0 \in [a, b]$. Но тогда $f(x_0) = \lim\limits_{i\to\infty} f(x_{n_i}) = M$, и, следовательно, функция f достигает максимума в точке x_0. Существование минимума доказывается аналогично □

Задача 2.15. *Верна ли эта теорема для (открытого) интервала (a, b)?*

Теорема 2.3. *Непрерывная функция f на отрезке $[a, b]$ принимает все значения между $f(a)$ и $f(b)$.*

Proof. Пусть $f(a) < f(b)$ и $\mu \in (f(a), f(b))$. Положим $E = \{x \in [a,b] \colon f(x) \leq \mu\}$ и $c = \sup(E)$. Тогда $f(c) \leq \mu < f(b)$, в частности, $c < b$. Докажем, что $f(c) = \mu$. Предположим, что $f(c) < \mu$. Положим $\alpha = \mu - f(c) > 0$. Тогда ввиду непрерывности f мы имеем $\exists\, \delta > 0$, $\forall\, c < c' < c+\delta \colon |f(c') - f(c)| < \alpha$. В частности $f(c') < f(c) + \alpha = \mu$ и $c' \in E$. Таким образом, $c = \sup(E) > c' > c$, что невозможно. Случай $f(a) > f(b)$ разбирается аналогично. □

Следствие 2.2. *Непрерывный образ отрезка является отрезком.*

Proof. Пусть функция f непрерывна на $[a,b]$. Согласно теореме 2.2, существуют $c, d \in [a,b]$, такие что $f(c) = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $f(d) = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ откуда $f([a,b]) \subset [f(c), f(d)]$. Но, согласно теореме 2.3, мы имеем $[f(c), f(d)] \subset f(I) \subset f([a,b])$, где I — отрезок с концами c и d. Следовательно, $f([a,b]) = [f(c), f(d)]$. □

Задача 2.16. *Обязательно ли является непрерывной функция, переводящая любой отрезок в отрезок?*

Определение 2.10. *Функция f, определенная на множестве I, и функция g, определенная на множестве J, называются обратными друг к другу, если $f(I) = J$, $g(J) = I$ и $\forall\, x \in J \colon f(g(x)) = x$, $\forall\, x \in I \colon g(f(x)) = x$.*

Задача 2.17. *Докажите, что строго монотонная непрерывная функция имеет обратную, она непрерывна, и ее график симметричен относительно прямой $y = x$ графику исходной функции.*

Замечание 2.1. *Всякая проколотая окрестность U окрестность точки x_0 содержит симметричную проколотую окрестность, то есть, окрестность вида $U_\rho = \{x | |x - x_0| < \rho\}$. Поэтому во всех наших определениях и доказательствах условие вида $|x - x_0| < \rho$ можно заменить на условие "x принадлежит проколотой окрестности точки x_0". В таком виде определение предела и непрерывности распространяется на любое множество, где определено понятие "окрестность точки". В дальнейшем мы будем активно пользоваться этим наблюдением.*

2.3. **Производная.**

Определение 2.11. *Функция f, определенная на множестве $I \subset \mathbb{R}$, называется дифференцируемой в точке $x_0 \in I$, если существует предел*

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

называемый производной функции f в точке x_0.

Пример 2.3. *Пусть $f(x) = x^n$. Тогда $f(x_0 + h) - f(x_0) = (x_0 + h)^n - x_0^n = x_0^n + n x_0^{n-1} h + g(x_0) h^2 - x_0^n = n x_0^{n-1} h + g(x_0) h^2$, где $g(x_0)$ — полином от x_0. Положим $h = x - x_0$. Тогда $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (n x_0^{n-1} + g(x_0) h) = n x_0^{n-1}$*

Задача 2.18. *Дайте определения: а) производной справа; б) производной слева; в) бесконечной производной ($+\infty$ и $-\infty$).*

Теорема 2.4. *Функция f дифференцируема в точке x_0, и имеет там производную $f'(x_0)$, если и только если*

$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\,o(1)$ *при* $h \to 0$.

Proof. Положим $x = x_0 + h$. Согласно нашим определениям $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$. Следовательно, $f(x_0+h) - f(x_0) = h(f'(x_0) + \epsilon(h))$, где $\lim\limits_{h\to 0} \epsilon(h) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) = 0$. □

Следствие 2.3. *Если функция f дифференцируема в точке x_0, то $f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)o(1)$ при $x \to x_0$ и f непрерывна в точке x_0.*

Proof. Первое утверждение получается подстановкой $h = x - x_0$. Из первого утверждение следует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. □

Задача 2.19. *Используя теорему 2.4, докажите, что $(u+v)' = u' + v'$, $(uv)' = u'v + uv'$, $(u^n)' = nu^{n-1}u'$, и если $v \neq 0$, то $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$.*

Теорема 2.5. *Предположим, что функция $u(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $f(x)$ дифференцируема в точке $u(x_0)$. Тогда функция $F(x) = f(u(x))$ дифференцируема в точке x_0 и $F'(x_0) = f'(u(x_0))u'(x_0)$.*

Proof. Положим $u_0 = u(x_0)$. Согласно теореме 2.4 $u(x_0+h) = u_0 + hv(h)$, где $\lim\limits_{h\to 0} v(h) = u'(x_0)$ и $f(u_0+l) = f(u_0) + lg(l)$, где $\lim\limits_{l\to 0} g(l) = f'(u_0)$. Поэтому $F(x_0+h) = f(u(x_0+h)) = f(u_0+hv(h)) = f(u_0)+lg(l)$, где $l = hv(h)$. Таким образом, $F'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} v(h)g(hv(h)) = (\lim\limits_{h\to 0} v(h))(\lim\limits_{h\to 0} g(hv(h))) = u'(x_0)f'(u_0)$.

□

Задача 2.20. *Докажите, что если $f(-x) = f(x)$ и функция f дифференцируема, то $f'(-x) = -f'(x)$.*

Лемма 2.2. *Пусть $f'(x_0) > 0$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что $f(x_0-h) < f(x_0) < f(x_0+h)$ при $0 < h < \delta$.*

Proof. Дифференцируемость в точке x_0 означает, что функция $\xi(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)$ стремится к 0 при $h \to 0$. Следовательно существует такое $\delta > 0$, что $f'(x_0) - \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} < f'(x_0)$ при $|h| < \delta$. Но тогда $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} > 0$, то есть $f(x_0+h) - f(x_0) > 0$, при $h > 0$ и $f(x_0+h) - f(x_0) < 0$, при $h < 0$. □

Задача 2.21. *Как ведет себя функция при $f'(x_0) < 0$.*

Теорема 2.6. *Пусть функции $f(x)$ и $g(y)$ являются обратными друг к другу, функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, $f'(x_0) \neq 0$. Тогда,если функция $g(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$, то она дифференцируема в этой точке и $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.*

Proof. Непрерывность отображения g означает, что $\lim\limits_{y\to y_0} x(y) = x_0$. Следовательно

$$\lim_{y\to y_0} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)^{-1} = (f'(x_0))^{-1}.$$

□

Задача 2.22. *Приведите пример обратных друг другу функции, одна из которых имеет положительную производную в точке, а другая не дифференцируемая в образе этой точки.*

Задача 2.23. *Докажите, что* $(x^a)' = ax^{a-1}$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\mathrm{tg}\ x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(\mathrm{ctg}\ x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $(a^x)' = a^x \ln a$, $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\mathrm{arctg}\ x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\mathrm{arcctg}\ x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

2.4. Производная на интервале.

Определение 2.12. *Функция, дифференцируемая в каждой точке множества I называется дифференцируемой на I*

В этом параграфе мы считаем, что функция f непрерывна на отрезке $I = [a, b]$, (где $a < b$), и дифференцируема на интервале (a, b).

Определение 2.13. *Говорят, что $x_0 \in (a, b)$ — точка локального максимума на (a, b), если $\exists\, \alpha > 0\ \forall |x - x_0| < \alpha\colon f(x) \le f(x_0)$. Аналогично определяется точка локального минимума.*

Теорема 2.7 (теорема Ферма)**.** *Производная в точках локального минимума и максимума на (a, b) равна нулю.*

Proof. Пусть $x_0 \in (a, b)$ — точка локального минимума или максимума. Тогда неравенство $f'(x_0) > 0$ невозможно ввиду леммы 2.2. Аналогично, неравенство $f'(x_0) < 0$ невозможно ввиду задачи 2.21. □

Теорема 2.8 (теорема Ролля)**.** *Если $f(a) = f(b)$, то существует точка $c \in (a, b)$, такая что $f'(c) = 0$.*

Proof. Согласно теореме 2.2, существуют точки x_1,x_2 $\in$ $[a$,$b]$, такие что $f(x_1) = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $f(x_2) = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Если точки x_1 и x_2 являются концами отрезка, то $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(a) = f(b) = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Следовательно $f(x)$ — постоянная функция и $f'(x) = 0$ на всем $(a$,$b)$. В противном случае или минимальное, или максимальное значение функции достигается в точке $x \in (a$,$b)$ и $f'(x) = 0$ согласно теореме 2.7. □

Теорема 2.9 (теорема Лагранжа)**.** *Существует точка $c \in (a, b)$, такая что $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.*

Proof. Положим $\phi(x) = (f(x) - f(a)) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$. Тогда $\phi(a) = 0 = \phi(b)$ и, согласно теореме 2.8, существует точка $c \in (a, b)$, такая что $0 = \phi'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Следствие 2.4. *Функция f на интервале (a, b)*

1) *постоянна, если и только если $f'(x) = 0$ при $x \in (a, b)$;*
2) *монотонно возрастает, если и только если $f'(x) \ge 0$ при $x \in (a, b)$;*
3) *строго монотонно возрастает, если $f'(x) > 0$ при $x \in (a, b)$.*

Задача 2.24. *Верно ли обратное утверждение к п. 3 следствия 2.4?*

Теорема 2.10 (теорема Коши)**.** *Пусть функции f и g непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b) и $g'(x) \ne 0$ на (a, b). Тогда существует точка $c \in (a, b)$, такая что $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.*

Proof. Равенство $g(b) = g(a)$ противоречит теореме 2.8 и, следовательно, функция $F(x) = (f(x) - f(a)) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(b))$ корректно определена. Но тогда $F(b) = f(b) - f(a) = F(a)$ и, согласно теореме 2.8, существует точка $c \in (a, b)$, такая что $0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c)$. □

2.5. **Правила Лопиталя.**

Теорема 2.11 (правило Лопиталя)**.** *Пусть функции $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b), $f(a) = g(a) = 0$ и $g'(x) \neq 0$ на (a, b). Тогда если предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ существует, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

Proof. Согласно теореме 2.10, для любого $x \in (a, b)$ существует точка $c = c(x) \in (a, x)$, такая что $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. Кроме того, c стремится к a если x стремится к a. Таким образом, $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{c\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. □

Пример 2.4. *По правилу Лопиталя* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tgx-x}{x-\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1/\cos^2 x-1}{1-\cos x} =$
$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1+\cos x}{\cos^2 x} = 2.$

Теорема 2.12. *Пусть $a > 0$, функции $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ дифференцируемы на полупрямой $[a, +\infty)$, $g'(x) \neq 0$ на $[a, +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Тогда, если предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ существует, то $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

Proof. Положим $t = \frac{1}{x}$. Тогда ,согласно теоремам 2.5 и 2.11

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{t\to 0} \frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□

Теорема 2.13. *Пусть функции $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывны на полуинтервале $(a, b]$, дифференцируемы на (a, b), $g'(x) \neq 0$ на (a, b) и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$. Тогда, если предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ существует, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

Proof. Пусть $K = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то есть $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall |x - a| < \delta\colon K - \frac{\epsilon}{2} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < K + \frac{\epsilon}{2}$. Пусть $a < x_0 < a + \delta$. Тогда существует $a < \tilde{x} < x_0 < a + \delta$ такой что $f(x) > f(x_0)$ и $g(x) > g(x_0)$ при $a < x < \tilde{x}$. Согласно теореме Коши 2.10, существует точка $c = c(x, x_0) \in (x, x_0)$, такая что $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, и, следовательно, $K - \frac{\epsilon}{2} < \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} < K + \frac{\epsilon}{2}$. С другой стороны, $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)} h(x)$, где $h(x) = \frac{1-f(x_0)/f(x)}{1-g(x_0)/g(x)} > 0$ при $a < x < \tilde{x}$. Следовательно, $\Big(K - \frac{\epsilon}{2}\Big) h^{-1}(x) \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \Big(K + \frac{\epsilon}{2}\Big) h^{-1}(x)$. Ввиду $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 1$ отсюда следует $K - \epsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq K + \epsilon$, то есть, $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = K = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. □

Задача 2.25. *Сформулируйте и докажите правило Лопиталя и в случае* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = +\infty$.

3. Интеграл

3.1. **Первообразная.**

Определение 3.1. *Функция F называется первообразной функции f, если она дифференцируема и $F' = f$.*

Теорема 3.1. *Пусть f — функция на интервале I. Тогда множество всех первообразных функции f на имеет вид $\{F + \lambda\}$, где F — одна из первообразных и $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Proof. Если $G = F+\lambda$, то $G' = F' = f$. Если $G' = F' = f$, то $(G-F)' = 0$ и $G-F = \lambda$ согласно следствию 2.4. □

Определение 3.2. *Множество всех первообразных функции f называется неопределенным интегралом функции f и обозначается $\int f(x)\,dx$.*

Задача 3.1. *Используя задачу 2.19 докажите аддитивность неопределенного интеграла $\int (c_1 f(x) + c_2 g(x))\,dx = c_1 \int f(x)\,dx + c_2 \int g(x)\,dx$ и формулу интегрирования по частям $\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx$*

Теорема 3.2. *(о замене переменных) Пусть $J = [\alpha,\beta]$, функция $\phi\colon J \to \mathbb{R}$ дифференцируема, $\phi(J) \in I$ и функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ имеет первообразную. Тогда $\int f(x)dx = \int f(\phi(t))d\phi$, где $d\phi = \phi'(t)dt$.*

Proof. Пусть $F'(x) = f(x)$ и $x = \phi(t)$. Тогда $(F(\phi(t)))' = F'(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$. Таким образом, $\int f(\phi(t))\phi'(t) = F(\phi(t)) = F(x) = \int f(x)\,dx$ □

Задача 3.2. *Докажите следующие формулы:*

1) $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(x > 0, \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1)$;
2) $\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln|x| + C_1, & x > 0, \\ \ln|x| + C_2, & x < 0; \end{cases}$
3) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$, $\int \cos x\,dx = \sin x + C$;
4) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $(a > 0,\ a \neq 1)$;
5) $\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$, $\int \coth x\,dx = \sinh x + C$;
6) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$;
7) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \mathit{arcsinh} x + C = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$.

Задача 3.3. *Пусть $c > b^2$ и $\Delta = \sqrt{c-b^2}$. Положим $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+2bx+c)^n}$*

Докажите, что

$$I_1 = \frac{\arctan\left(\frac{x+b}{\Delta}\right)}{\Delta} + C$$

и

$$I_n = \frac{x+b}{2\Delta^2(n-1)(x^2+2bx+c)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2\Delta^2(n-1)} I_{n-1} + C$$

при $n > 1$.

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+2bc+c} = \frac{1}{2}\ln|x^2+2bx+c| - bI_1 + C$$

и

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+2bc+c)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(x^2+2bx+c)^{n-1}} - bI_n + C$$

при $n > 1$.

3.2. **Методы интегрирования элементарных функций.** Напомним, что рациональная функция — это функция вида $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x^i \Big/ \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i x^i$, где $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$.

Задача 3.4. *Используя существование n комплексных корней у многочлена степени n, докажите, что всякая рациональная функция представляется в виде:*

$$R(x) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\lambda_i} \frac{A_j^i}{(x+a_i)^j} + \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{\gamma_i} \frac{B_j^i x + C_j^i}{(x^2+2b_i x + c_i)^j},$$

где $R(x)$ — вещественный многочлен, $A_j^i, B_j^i, C_j^i, a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ и $c_i > b_i^2$.

I. Рациональные функции интегрируются в 2 этапа:

1. Приведение к виду

$$(*) \qquad R(x) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\lambda_i} \frac{A_j^i}{(x+a_i)^j} + \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{\gamma_i} \frac{B_j^i x + C_j^i}{(x^2+2b_i x + c_i)^j}.$$

2. Интегрирование функций

$$\frac{A_j^i}{(x+a_i)^j}, \quad \frac{B_j^i x}{(x^2+2b_i x + c_i)^j}, \quad \frac{C_j^i}{(x^2+2b_i x + c_i)^j}$$

(задача 9.3). Коэффициенты в разложении $(*)$ удобно искать по следующей схеме.

1. Представим знаменатель в виде

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j x^j = \prod_{i=1}^{k} (x+a_i)^{\lambda_i} \prod_{i=1}^{l} (x^2 + 2b_i x + c_i)^{\gamma_i}$$

и тем самым найдем $k, l, \lambda_i, \gamma_i, a_i, b_i, c_i$.

2. Найдем $R(x)$ как частное от деления многочленов $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x^i$ и $\sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j x^j$.

3. Напишем разложение $(*)$ функции f, считая, что A_j^i, B_j^i, C_j^i — неизвестные коэффициенты.

4. Приведем выражение $(*)$ к общему знаменателю и приравняем коэффициенты полиномов#числителей.

5. Решим полученную систему линейных уравнений на A_j^i, B_j^i, C_j^i.

Пример 3.1. *Найдем* $\int \frac{3}{x^3-1}\,dx$. *Сначала разложим* $\frac{3}{x^3-1}$*:*

$$\frac{3}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1};$$

$$3 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1) =$$
$$= (A+B)x^2 + (A+C-B)x + (A-C);$$

$$\begin{cases} A+B=0, \\ A+C-B=0, \\ A-C=3; \end{cases} \begin{cases} A=1, \\ B=-1, \\ C=-2; \end{cases}$$

$$\frac{3}{x^3-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{x}{x^2+x+1} - 2\frac{1}{x^2+x+1}.$$

Теперь проинтегрируем полученные дроби:

$$\int \frac{dx}{x-1} = \begin{cases} \ln|x-1| + C_1, x > 1, \\ \ln|x-1| + C_2, x < 1; \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{\arctan\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{1-(1/2)^2}}\right)}{\sqrt{1-(1/2)^2}} + C = = \sqrt{\frac{4}{3}}\arctan\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + C;$$

$$\int \frac{x}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3}}\arctan\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + C.$$

Итого:

$$\int \frac{3\,dx}{x^3-1} =$$

$$= \begin{cases} \ln|x-1| - 2\sqrt{\frac{4}{3}}\arctan\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) - \\ - \left(\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3}}\arctan\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\right) + C_1, \quad x > 1; \\ \ln|x-1| - 2\sqrt{\frac{4}{3}}\arctan\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) - \\ - \left(\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3}}\arctan\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\right) + C_2, \quad x < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \\ - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C_1, \qquad x > 1; \\ \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \\ - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C_2, \qquad x < 1. \end{cases}$$

II. Пусть $f(t)$— рациональная функция. Найдем $\int f(e^t)\,dt$. Положим $x = e^t$ и $t = \ln(x)$. Тогда $\int f(e^t)\,dt = \int \frac{f(e^t)}{e^t} \cdot (e^t)'\,dt = \int \frac{f(x)}{x}\,dx$ — интеграл от рациональной функции.

Пример 3.2. *Найдем* $\int \frac{e^{3t}+1}{e^t+1}\,dt$. *Заметим, что* $\frac{e^{3t}+1}{e^t+1} = f(e^t)$, *где* $f(x) = x^2 - x + 1$. *Положим* $x = e^t$. *Тогда, при* $x > 0$,

$$\int f(e^t)\,dt = \int \frac{x^2-x+1}{x}\,dx = \int \left(x - 1 + \frac{1}{x}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x| + C = \frac{1}{2}e^{2t} - e^t + t + C.$$

III. Пусть $f(u,v)$— рациональная функция, $f(u,v) = \frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$, где $P(u,v)$ и $Q(u,v)$— полиномы. Найдем $\int f(\cos x, \sin x)\,dx$. Положим $t = \tan\frac{x}{2}$. Тогда

$x = \phi(t) = 2 \cdot \arctan t$,

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin x = \frac{2 \cdot \tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)}.$$

и $\phi'(t) = \frac{2}{1+t^2}$. Таким образом,

$$\int f(\cos x, \sin x)\, dx = \int f\Big(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\Big) \frac{2}{1+t^2}\, dt$$

— интеграл от рациональной функции.

Пример 3.3. *Найдем* $\int \frac{dx}{3+\cos x}$. *Мы имеем*

$$\int \frac{dx}{3 + \cos x} = \int \frac{1}{3 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{1}{2+t^2}\, dt =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan(x/2)}{\sqrt{2}} + C.$$

IV. Пусть $f(u,v)$— рациональная функция. Найдем интеграл $\int f\Bigg(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Bigg)\, dx$. Положим $t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. Тогда $x = \phi(t) = \frac{dt^m - b}{-ct^m + a}$ и $\phi'(t) = \frac{ad-bc}{(-ct^m+a)^2} m t^{m-1}$. Таким образом,

$$\int f\Bigg(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Bigg)\, dx = \int f\Big(\frac{dt^m - b}{-ct^m + a}, t\Big) \frac{ad - bc}{(-ct^m + a)^2} m t^{m-1}\, dt$$

— интеграл от рациональной функции.

Пример 3.4. *Найдем* $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\, dx$. *Положим* $t = \sqrt{x+1}$, *тогда* $x = t^2 - 1$, $x' = 2t$ *и мы получаем*

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\, dx = \int \frac{t}{t^2 - 1} 2t\, dt = \int \frac{2t^2}{t^2-1}\, dt =$$
$$= \int \Big(2 + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\Big)\, dt = 2t + \ln|t-1| - \ln|t+1| + C_{1,2,3} =$$
$$= 2\sqrt{x+1} + \ln|\sqrt{x+1} - 1| - \ln|\sqrt{x+1} + 1| + C_{1,2}.$$

V. Комбинируя подстановки II, III и IV, можно интегрировать любую рациональную функцию от e^t, $\cos t$, $\sin t$ и $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

3.3. **Аппроксимация непрерывных функций.** Далее мы считаем, что I— одно из множеств вида $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b), $(-\infty,a]$, $(-\infty,a)$, $[a,+\infty)$, $(a,+\infty)$, $(-\infty,+\infty)$.

Определение 3.3. *Говорят, что функция f равномерно непрерывна на I, если* $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall |x - x'| < \delta;\ x, x' \in I \colon |f(x) - f(x')| < \epsilon$.

Задача 3.5. *Докажите, что равномерно непрерывная функция непрерывна.*

Пример 3.5. *Функция $f(x) = x^2$ на $\mathbb{R}$ непрерывна. С другой стороны, если $x = 1/\delta$, $x' = 1/\delta + \delta$, то $|x - x'| = \delta$, но*

$$|f(x) - f(x')| = |1/\delta^2 - 1/\delta^2 - 2 - \delta^2| = 2 + \delta^2 > 2.$$

Таким образом, функция $f(x)$ не равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

Теорема 3.3. *Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, равномерно непрерывна на нем.*

Proof. Предположим обратное, то есть пусть функция f непрерывна, но не равномерно непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда $\exists \epsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists |x_n - y_n| < 1/n\colon |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$. Согласно теореме Больцано-Вейерштрасса, существует подпоследовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$, такая что $\lim\limits_{i\to\infty} x_{n_i} = x \in [a, b]$. Поскольку $\lim\limits_{i\to\infty}(x_{n_i} - y_{n_i}) = 0$, мы имеем $\lim\limits_{i\to\infty} y_{n_i} = x$. Ввиду непрерывности $f(x)$, выполняются равенства $\lim\limits_{i\to\infty} f(x_{n_i}) = f(x) = \lim\limits_{i\to\infty} f(y_{n_i})$. Следовательно, $|f(x_{n_i}) - f(y_{n_i})| < \epsilon$ для достаточно больших i, что невозможно. $\square$

Определение 3.4. *Будем говорить, что функция $g : I \to \mathbb{R}$ принадлежит ε-окрестности функция $f : I \to \mathbb{R}$, если $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in I$*

Функцию на отрезке $[a, b]$, постоянную на интервалах $(x_i, x_{i+1}]$, где $a = x_0 < \dots < x_n = b$ назовем *ступенчатой.*

Теорема 3.4. *Для любом $\varepsilon > 0$, ε-окрестность непрерывной функции на отрезке содержит ступенчатую функцию.*

Proof. Пусть f — непрерывная функция на отрезке $[a, b]$ и $\varepsilon > 0$. Тогда, согласно теореме 3.3, $\exists \delta > 0\ \forall |x - x'| < \delta;\ x, x' \in I\colon |f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Рассмотрим произвольное разбиение $a = x_0 < \dots < x_n = b$, такое что $x_{i+1} - x_i < \delta$. Положим $g(x) = f(x_i)$ при $x \in (x_i, x_{i+1}]$ и $g(a) = f(a)$. Тогда $|f(x) - g(x)| < \delta$ при $x \in [a, b]$. $\square$

Определение 3.5. *Говорят, что последовательность $(f_1, f_2, \dots)$ функций на $I \subset \mathbb{R}$ равномерно сходится к функции f на I, если*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m\colon \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

то есть, все функции последовательности $(f_1, f_2, \dots)$ принадлежат ϵ-окрестности функции f начиная с некоторого m.

Следствие 3.1. *Для любой непрерывной функции на отрезке существует равномерно сходящееся к ней последовательность ступенчатых функций.*

Задача 3.6. *Докажите, что если последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится к функции f, то она поточечно сходится к функции f, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для всех $x \in I$.*

Пример 3.6. *Рассмотрим функцию $f_n(x) = x^n$ на $[0, 1)$. Для каждой точки $x \in [0, 1)$ мы имеем $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Следовательно, f_n поточечно сходится к $f(x) = 0$. Однако $\sup\limits_{x\in[0,1)}(f_n(x) - f(x)) = \sup\limits_{0\leq x<1} x^n = 1$, и равномерной сходимости нет.*

Задача 3.7. *Пусть последовательности $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ равномерно сходятся на I к функциям f и g соответственно. Докажите, что тогда последовательности $\{f_n + g_n\}$, $\{|f_n|\}$ и $\{\lambda f_n\}$ тоже равномерно сходятся к функциям $f + g$, $|f|$ и λf соответственно.*

Задача 3.8. *Докажите, что если последовательность непрерывных функций равномерно сходится к функции f, то функция f непрерывна.*

3.4. **Интеграл непрерывной функции.** Определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (эпитет "определенный" часто опускается) функции f на отрезке $[a,b]$—это площадь фигуры, ограниченной графиком функции f, осью Ox и прямыми $x=a$ и $y=b$. При этом площадь областей, лежащих выше оси Ox, берется со знаком плюс, а ниже — со знаком минус. Осталось определить, что такое площадь.

Ступенчатой функции на отрезке $[a,b]$ отвечает разбиение $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$, такое что $f(x)=c_i$ при $x\in(x_i,x_{i+1}]$ $(0\le i<n)$ и $f(a)=c_0$. Для ступенчатой функции интеграл по определению равен $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_i(x_{i+1}-x_i)$. Для определения интеграла произвольной непрерывной функции на отрезке воспользуемся следствием 3.1

Задача 3.9. *Докажите, что сумма и произведение ступенчатых функций — тоже ступенчатые функции и при этом* $\int\limits_a^b(\lambda f+\mu g)(x)\,dx = \lambda\int\limits_a^b f(x)\,dx+\mu\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *и* $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$

Теорема-определение 3.1. *Пусть f — непрерывная функция на отрезке $[a,b]$ и $\{f_i\}$ — последовательность ступенчатых функций равномерно сходящаяся к f. Тогда последовательность* $\left\{\int\limits_a^b f_i(x)\,dx\right\}$ *сходится и этот предел предел один и тот же для всех последовательность ступенчатых функций равномерно сходящаяся к f. Этот предел называется интегралом функции f на отрезке $[a,b]$ и обозначается* $\int\limits_a^b f_n(x)\,dx.$

Proof. Последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится к функции f, то есть $\forall\epsilon>0\ \exists m\in\mathbb{N}\ \forall n>m\colon |f(x)-f_n(x)|<\frac{\epsilon}{4(b-a)}$. Следовательно,$|f_n(x)-f_{n'}(x)|=|(f_n(x)-f(x))+(f(x)-f_{n'}(x))|<\frac{\epsilon}{2(b-a)}$ при любых $n,n'>m$. Таким образом,$\left|\int\limits_a^b f_n(x)\,dx-\int\limits_a^b f_{n'}(x)\,dx\right| \le \int\limits_a^b |f_n(x)-f_{n'}(x)|\,dx \le \int\limits_a^b \frac{\epsilon}{2(b-a)}\,dx = \frac{\epsilon}{2}<\epsilon$ и, согласно критерию Коши,последовательность $\left\{\int\limits_a^b f_n(x)\,dx\right\}$ сходится.

Пусть $\{g_n\}$ — другая последовательность ступенчатых функций, равномерно сходящаяся к f. Тогда последовательность $f_1,g_1,f_2,g_2,\dots$ равномерно сходится к f и, как уже доказано, последовательность $\int\limits_a^b f_1(x)\,dx, \int\limits_a^b g_1(x)\,dx, \int\limits_a^b f_2(x)\,dx, \int\limits_a^b g_2(x)\,dx,\dots$ тоже сходится. Таким образом, ее подпоследовательности $\left\{\int\limits_a^b f_n(x)\,dx\right\}$ и $\left\{\int\limits_a^b g_n(x)\,dx\right\}$ имеют одинаковый предел. □

Задача 3.10. *Пусть последовательность непрерывных функций $f_1,f_2,\dots,$ равномерно сходится к f на отрезке $[a,b]$. Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\,dx=\int\limits_a^b f(x)\,dx$

Задача 3.11. *Пусть f и g — непрерывные функции на отрезке $[a,b]$. Докажите, что тогда* $\int\limits_a^b(\lambda f + \mu g)(x)\,dx = \lambda\int\limits_a^b f(x)\,dx + \mu\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *Верно ли, что* $\int\limits_a^b(fg)(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx\cdot\int\limits_a^b g(x)\,dx$*?*

Замечание 3.1. *Таким образом соответствие $f \mapsto \int\limits_a^b f(x)\,dx$ порождает непрерывную (в топологии равномерной сходимости) линейную функцию $L\to\mathbb{R}$ на бесконечномерном векторном пространстве L функций непрерывных на отрезке $[a,b]$.*

Задача 3.12. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$. Докажите, что: 1) если $f(x)\geq 0$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx\geq 0$; 2)если $f(x)\geq 0$ и $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$, то $f(x) = 0$; 3) $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$; 4) $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) \leq \frac{\int\limits_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$; 5)если $g(x)\geq 0$ непрерывна на $[a,b]$, то существует $c\in[a,b]$, такое что $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int\limits_a^b g(x)\,dx$.*

Зададим на L скалярное произведение равенством $(f,g)=\int\limits_a^b(fg)(x)\,dx$.

Теорема 3.5 (неравенство Коши-Шварца)**.** *Пусть f и g — непрерывные функции на отрезке $[a,b]$. Тогда $(f,g)^2\leq(f,f)(g,g)$, то есть* $\left(\int\limits_a^b(fg)(x)\,dx\right)^2\leq\int\limits_a^b f^2(x)\,dx\cdot\int\limits_a^b g^2(x)\,dx$.

Proof. Положим $B=\int\limits_a^b(fg)(x)\,dx$, $A=\int\limits_a^b f^2(x)\,dx$, $C=\int\limits_a^b g^2(x)\,dx$. Тогда$Az^2+2Bz+C=\int\limits_a^b(zf(x)+g(x))^2\,dx\geq 0$. Таким образом, при $A\neq 0$ уравнение $Az^2+2Bz+C$ имеет не более одного корня и, следовательно, $B^2-AC\leq 0$. Случай $A=0$ следует из задачи 3.12 □

Задача 3.13 (метод прямоугольников)**.** *Будем аппроксимировать интеграл суммой площадей прямоугольников. Для этого разобьем отрезок $[a,b]$ точками $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ на n равных отрезков. На полуинтервале $(x_i,x_{i+1}]$ аппроксимируем функцию f функцией $g_n(x)=f(x_i)$. Докажите, что производная f' существует и ограничена, то* $|\int\limits_a^b f(x)\,dx-\int\limits_a^b g_n(x)\,dx|\leq M\frac{(b-a)^2}{2n}$, *где* $M=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$.

3.5. **Формула Ньютона-Лейбница.**

Определение 3.6. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ $(a < b)$. Положим* $\int\limits_b^a f(x)\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Задача 3.14. *Докажите, что для любых точек $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$ выполнено равенство:* $\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int\limits_\beta^\gamma f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\gamma f(x)\,dx$.

Теорема 3.6 (теорема Ньютона-Лейбница)**.** *Пусть функция f непрерывна на интервале $I \subset \mathbb{R}$ и $x_0 \in I$. Тогда функция $F(x) = \int\limits_{x_0}^x f(t)\,dt$ является первообразной функции f.*

Proof. Согласно задаче 3.14 мы имеем $F(x+h) - F(x) = \int\limits_x^{x+h} f(t)\,dt$, а согласно задаче 3.12 получаем

$$\min_{t\in[x,x+h]} f(t) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq \max_{t\in[x,x+h]} f(t).$$

Из непрерывности функции f следует, что $\lim\limits_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ существует и равен $f(x)$. Таким образом, $F'(x) = f(x)$. □ □

Следствие 3.2. *Если Φ— первообразная непрерывной функции f на отрезке $[a, b]$, то* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Задача 3.15. *Пусть $J = [\alpha, \beta]$, функция $\phi\colon J \to \mathbb{R}$ имеет непрерывную производную, $\phi(J) \in I$ и функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ непрерывна. Тогда замена переменных $x = \phi(t)$ влечет* $\int\limits_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$.

Задача 3.16. *Докажите, что для непрерывной функции на $[a, b]$ существует точка $c \in [a, b]$, такая что* $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$

4. Числовые ряды

4.1. Положительные ряды.

Определение 4.1. *Ряд — это бесконечная последовательность чисел, соединенных знаками $+$, то есть выражение вида $a_1 + a_2 + \cdots = \sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$. Члены последовательности называются членами ряда. Суммы чисел $A_n = \sum\limits_{i=k}^{k+n} a_i$ называются частичными суммами ряда. Если предел $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ существует и конечен, то он и называется суммой ряда и обозначается (так же, как сам ряд) $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$. В этом случае говорят, что ряд сходится. Если конечный предел не существует, то говорят, что ряд расходится.*

Задача 4.1. *Докажите, что для всякой числовой последовательности существует ряд, частичные суммы которого образуют эту последовательность. Таким образом, ряд — это другая запись последовательности.*

Пример 4.1. *Бесконечной десятичной дроби* $c_0, c_1c_2\ldots$ *соответствует ряд* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i 10^{-i}$. *Элементы ряда имеют вид* $c_i 10^{-i}$. *Частичные суммы образуют десятичную последовательность числа. Она сходится к вещественному числу, отвечающему* $c_0, c_1c_2\ldots$

Задача 4.2. *Докажите, что ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *сходится, если и только если* $\forall \epsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall (n > m, l \geq 0)\colon |\sum\limits_{i=n}^{n+l} a_i| < \epsilon$. *В частности, если ряд сходится, то* $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = 0$.

Задача 4.3. *Докажите, что если ряды* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *и* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ *сходятся, то ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (\lambda a_i + \mu b_i)$ *(где* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*) тоже сходится и его сумма равна* $\lambda \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i + \mu \sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$.

Определение 4.2. *Ряд, все члены которого неотрицательны, называется положительным.*

Задача 4.4. *Докажите, что положительный ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *сходится, если и только если его частичные суммы ограничены. В этом случае его сумма не меняется при любой перестановке членов ряда.*

Определение 4.3. *Говорят, что ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ *мажорирует ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$, *если* $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m\colon b_n \geq a_n$.

Теорема 4.1. *Пусть положительный ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ *мажорирует положительный ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$. *Тогда если ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ *сходится, то ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *тоже сходится.*

Proof. Положим $A_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, $B_n = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$. Из сходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ вытекает ограниченность множества B_n. Отсюда следует ограниченность множества A_n, а значит, согласно задаче 4.4, и сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$. □

Следствие 4.1. *Пусть* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *и* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ *— положительные ряды,* $a_i, b_i \neq 0$, *причем предел* $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{a_i}{b_i}$ *существует, конечен и отличен от* 0. *Тогда ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *сходится, если и только если сходится ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$.

Proof. Пусть $K = \lim\limits_{i\to\infty} \frac{a_i}{b_i}$ и ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ сходится. Тогда $\forall \epsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m\colon K - \epsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq K + \epsilon$ и, в частности, $a_n \leq b_n(K + \epsilon)$. Согласно теореме 4.1, отсюда следует сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$. Обратное утверждение следует из доказанного выше ввиду равенства $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{b_i}{a_i} = \frac{1}{K}$. $\square$

Следствие 4.2. *Пусть* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *и* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ *— положительные ряды,* $a_i, b_i \neq 0$ *и* $\exists\, m \in \mathbb{N}\ \forall\, n > m$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$. *Тогда если ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ *сходится, то ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *тоже сходится.*

Proof. Перемножим почленно неравенства $\frac{a_{m+1}}{a_m} \leq \frac{b_{m+1}}{b_m}$, $\frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} \leq \frac{b_{m+2}}{b_{m+1}}$, $\ldots$, $\frac{a_{m+M+1}}{a_{m+M}} \leq \frac{b_{m+M+1}}{b_{m+M}}$. Получим $\frac{a_{m+M+1}}{a_m} \leq \frac{b_{m+M+1}}{b_m}$, или $a_{m+M+1} \leq \frac{a_m}{b_m} b_{m+M+1}$. Согласно теореме 4.1, отсюда следует сходимость ряда $\sum\limits_{i=m}^{\infty} a_i$, а значит, и ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$. $\square$

Теорема 4.2 (интегральный признак Коши). *Пусть* $f(x)$ *— положительная непрерывная монотонно убывающая функция на множестве* $[1, +\infty)$ *и* $a_i = f(i)$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *сходится, если и только если существует конечный предел* $\lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_1^x f(t)\,dt$.

Proof. Пусть $F(x) = \int\limits_1^x f(t)\,dt$ и $b_i = F(i+1) - F(i)$. Тогда по теореме о среднем значении (задача 3.15) $b_i = \int\limits_i^{i+1} f(t)\,dt = f(i+\theta)$, где $0 < \theta < 1$, и, следовательно, $b_i \leq a_i$. Аналогично $b_{i-1} = \int\limits_{i-1}^{i} f(t)\,dt = f(i-1+\theta) \geq a_i$. Таким образом, согласно теореме 4.1, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится, если и только если сходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$. Но $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} b_i = \lim\limits_{n\to\infty} (F(n+1) - F(1)) = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_1^n f(t)\,dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_1^x f(t)\,dt$. $\square$

Пример 4.2. *Положим* $f(x) = \frac{1}{x}$. *Тогда* $\lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_1^x f(t)\,dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$. *Таким образом, ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ *расходится.*

Задача 4.5. *Докажите, что ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ *расходятся.*

4.2. **Признак Гаусса и гипергеометрический ряд.**

Пример 4.3. *Рассмотрим ряд* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} q^i$. *При* $q \neq 1$ *положим* $A_n = \sum\limits_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. *Если* $|q| < 1$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \frac{1}{1-q} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} q^i$. *При* $|q| \geq 1$ *ряд* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} q^i$ *расходится.*

Теорема 4.3. *[признак Коши] Пусть* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *— положительный ряд. Тогда 1) если* $\exists\, q < 1\ \exists\, m \in \mathbb{N}\ \forall\, n > m$: $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, *то ряд сходится*; 2) *если* $\exists\, m \in \mathbb{N}\ \forall\, n > m$: $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, *то ряд расходится. В частности, если предел* $p = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ *существует, то ряд сходится при* $p < 1$ *и расходится при* $p > 1$.

Proof. 1) Положим $b_i = q^i$. Тогда ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ сходится (пример 4.3) и $a_n \leq b_n$ при $n > m$. Согласно теореме 4.1, отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ тоже сходится. Утверждение 2) следует из задачи 4.2. □

Теорема 4.4 (признак Даламбера). *Пусть* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *— положительный ряд. Тогда 1) если* $\exists\, q < 1\ \exists\, m \in \mathbb{N}\ \forall\, n > m$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, *то ряд сходится*; 2) *если* $\exists\, m \in \mathbb{N}\ \forall\, n > m$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, *то ряд расходится. В частности, если предел* $p = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ *существует, то ряд сходится при* $p < 1$ *и расходится при* $p > 1$.

Proof. 1) Положим $b_i = q^i$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ сходится (пример 4.3) и $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Согласно следствию 4.2, отсюда вытекает, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ тоже сходится. Утверждение 2) следует из задачи 4.2. □

Теорема 4.5 (признак Куммера). *Пусть* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *— положительный ряд и* $c_1, c_2, \ldots$ *— последовательность положительных чисел. Тогда 1) если* $\exists\, \delta > 0\ \exists\, m \in \mathbb{N}\ \forall\, n > m$: $c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geq \delta$, *то ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *сходится; 2) если ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{c_i}$ *расходится и* $\exists\, m \in \mathbb{N}\ \forall\, n > m$: $c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leq 0$, *то ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *расходится.*

Proof. 1) По условию теоремы $b_n = c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} \geq \delta a_{n+1} > 0$. В частности $c_n a_n > c_{n+1} a_{n+1} \geq 0$ и предел $p = \lim\limits_{i\to\infty} c_i a_i$ существует. Кроме того $B_n = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i = c_1 a_1 - c_{n+1} a_{n+1}$, откуда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i = c_1 a_1 - p$. Но сходящийся ряд $\frac{1}{\delta} \sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ мажорирует ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ в виду $b_n = c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} \geq \delta a_{n+1}$. Согласно теореме 4.1, отсюда следует сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$.

2) Если $c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leq 0$, то $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{1/c_{n+1}}{1/c_n}$. По-этому, если бы ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходился, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{c_i}$ тоже бы сходился согласно следствию 4.2. □

Следствие 4.3 (признак Раабе). *Пусть* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ — *положительный ряд. Тогда* 1) *если* $\exists\, r > 1\ \exists\, m \in \mathbb{N}\ \forall\, n > m\colon n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big) \geq r$, *то ряд* $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ *сходится;* 2) *если* $\exists\, m \in \mathbb{N}\ \forall\, n > m\colon n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big) \leq 1$, *то ряд* $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ *расходится.*

Proof. Положим $c_n = n$. Тогда 1) $c_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} = \Big(n\frac{a_n}{a_{n+1}} - n\Big) - 1 \geq r - 1 > 0$, и ряд сходится ввиду теоремы 4.5; 2) $c_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} = \Big(n\frac{a_n}{a_{n+1}} - n\Big) - 1 \leq 0$, причем ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{c_i}$ расходится, согласно примеру 4.2. Таким образом ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ расходится ввиду теоремы 4.5. □

Следствие 4.4 (признак Бертрана). *Пусть* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ — *положительный ряд и последовательность* $B_n = (\ln n)\Big(n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big) - 1\Big)$ *имеет конечный или бесконечный предел* B. *Тогда при* $B > 1$ *ряд* $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ *сходится, а при* $B < 1$ — *расходится.*

Proof. Положим $c_n = n \ln n$. Тогда, согласно задаче 4.5, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ расходится. Кроме того, $c_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} = n \ln n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln(n+1) =$
$(\ln n)\Big[n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big) - 1\Big] - \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{n+1} = B_n - \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{n+1}$. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(c_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}\Big) = B - 1$, и нужное утверждение следует из теоремы 4.5. □

Теорема 4.6 (признак Гаусса). *Пусть* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ — *положительный ряд такой, что* $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}$, *где последовательность* θ_n *ограничена. Тогда* 1) *если* $\lambda > 1$ *или* $\lambda = 1$, $\mu > 1$, *то ряд сходится;* 2) *Если* $\lambda < 1$ *или* $\lambda = 1$, $\mu \leq 1$, *то ряд расходится.*

Proof. При $\lambda \neq 1$ признак Гаусса — это признак Даламбера (теорема 4.4). Если $\lambda = 1$, то $n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big) = \mu + \frac{\theta_n}{n}$. При $\mu \neq 1$ нужное утверждение следует из признака Раабе (следствие 4.3). Если $\lambda = \mu = 1$, то $(\ln n)\Big(n\Big(\frac{a_n}{a_{n-1}} - 1\Big) - 1\Big) = \frac{\ln n}{n}\theta_n$ и ввиду признака Бертрана (следствие 4.4) ряд расходится. □

Пример-определение 4.1. *Гипергеометрическим рядом Гаусса называется ряд*

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}\,\frac{x^n}{n!}.$$

Положим

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}\,\frac{x^n}{n!}.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}\, x = x$.

Будем пока считать, что $\alpha, \beta, \gamma, x > 0$. Тогда по признаку Даламбера ряд сходится при $x < 1$ и расходится при $x > 1$. Если $x = 1$, то, используя равенство $\frac{1}{1+\eta/n} = 1 - \frac{\eta}{n} + \frac{\eta^2}{1+\eta/n}\frac{1}{n^2}$, находим, что

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(1+n)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)} = \frac{(1+1/n)(1+\gamma/n)}{(1+\alpha/n)(1+\beta/n)} =$$

$$\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big(1+\frac{\gamma}{n}\Big)\times\Big(1-\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha^2}{1+\alpha/n}\frac{1}{n^2}\Big)\Big(1-\frac{\beta}{n}+\frac{\beta^2}{1+\beta/n}\frac{1}{n^2}\Big) = 1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\theta_n}{n^2},$$

где последовательность θ_n ограничена. Таким образом, согласно признаку Гаусса ряд $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ сходится при $\gamma - \alpha - \beta > 0$ и расходится при $\gamma - \alpha - \beta \le 0$.

Задача 4.6. *Докажите, что функция $\omega(x) = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ удовлетворяет гипергеометрическому уравнению*

$$x(1-x)\omega'' + (\gamma - (\alpha+\beta+1)x)\omega' - \alpha\beta\omega = 0.$$

Задача 4.7. *Докажите, что $(1+z)^n = F(-n, 1, 1, -z)$ при $n \in \mathbb{N}$*

4.3. **Произвольные числовые ряды.**

Определение 4.4. *Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ называется абсолютно сходящимся, если ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i|$ сходится .*

Задача 4.8. *Докажите, что гипергеометрический ряд Гаусса абсолютно сходится при любых $\alpha, \beta, \gamma, x \in \mathbb{R}$, где $\gamma \ne 0, -1, -2, \dots$, $|x| < 1$, и расходится при $|x| > 1$. Если $|x| = 1$, то ряд абсолютно сходится при $(\gamma - \alpha - \beta) > 0$.*

Задача 4.9. *Пусть ряды $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ абсолютно сходятся. Докажите, что ряд $\sum\limits_{i=1,j=1}^{\infty} (a_i b_j)$ тоже абсолютно сходится и $\sum\limits_{i=1,j=1}^{\infty} a_i b_j = \Big(\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i\Big)\Big(\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j\Big)$.*

Теорема 4.7. *Пусть ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ абсолютно сходится, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ составлен из его положительных членов, а ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i$ составлен из его отрицательных членов. Тогда ряды $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i$сходятся и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i + \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i$.*

Proof. Положим $p_n = \frac{|a_n|+a_n}{2}$ и $q_n = \frac{|a_n|-a_n}{2}$. Тогда $0 \le p_n, q_n \le |a_n|$. Следовательно, ряды $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} q_i$ сходятся, причем $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} (p_i - q_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i - \sum\limits_{i=1}^{\infty} q_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i + \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i$. □

Биекция множества натуральных чисел $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ называется *перестановкой.* Зафиксируем произвольную перестановку σ. Она переводит ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ в ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{\sigma(i)} = a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)} + \dots$

Теорема 4.8. *Пусть ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *абсолютно сходится. Тогда ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{\sigma(i)}$ *также абсолютно сходится и имеет ту же сумму.*

Proof. Пусть $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ — положительный ряд и A его сумма. Тогда последовательность $A'_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)}$ монотонно возрастает и $A'_n \leq A$. Следовательно, существует предел $A' = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{\sigma(i)} \leq A$. Ввиду обратимости отображения σ верно и неравенство $A \leq A'$, значит, $A = A'$. Пусть теперь $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$— произвольный абсолютно сходящийся ряд. Как уже доказано, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i| = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_{\sigma(i)}|$ и, следовательно, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{\sigma(i)}$ абсолютно сходится. Равенство сумм вытекает из теоремы 4.7. □

Определение 4.5. *Сходящийся ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *называется условно сходящимся, если ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i|$ *расходится.*

Лемма 4.1. *Пусть ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *условно сходится. Тогда ряды его положительных и отрицательных членов расходятся.*

Proof. Предположим, что ряд из положительных членов $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{|a_i|+a_i}{2}$ сходится. Тогда ряд из отрицательных членов $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\Big(-\frac{|a_i|-a_i}{2}\Big) = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\Big(a_i - \frac{|a_i|+a_i}{2}\Big)$ тоже сходится. Следовательно, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i| = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{|a_i|+a_i}{2} + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{|a_i|-a_i}{2}$ тоже сходится, что противоречит условию леммы. □

Теорема 4.9 (теорема Римана)**.** *Пусть ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *условно сходится. Тогда для любого* $B \in \mathbb{R}$ *существует перестановка* σ *такая, что* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{\sigma(i)} = B$.

Proof. Пусть $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i$ — ряды положительных и отрицательных членов ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ соответственно. Согласно лемме 4.1, они расходятся. Рассмотрим минимальную конечную сумму первых членов b_i, такую что $\sum\limits_{i=1}^{k_1} b_i > B$, затем минимальную конечную сумму $\sum\limits_{i=1}^{k_2} c_i$, такую что $\sum\limits_{i=1}^{k_1} b_i + \sum\limits_{i=1}^{k_2} c_i < B$, затем минимальную сумму следующих членов b_i, такую что $\sum\limits_{i=1}^{k_1} b_i + \sum\limits_{i=1}^{k_2} c_i + \sum\limits_{i=k_1+1}^{k_3} b_i > B$ и т.д. Ввиду того, что $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = 0$ (задача 4.2), сумма ряда $b_1, \ldots, b_{k_1}, c_1, \ldots, c_{k_2}, b_{k_1+1}, \ldots, b_{k_3}, \ldots$ будет равна B. □

Задача 4.10. *Докажите, что члены условно сходящегося ряда можно переставить таким образом, чтобы частичные суммы стремились 1) к $+\infty$; 2) к $-\infty$.*

Определение 4.6. *Ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *со свойством* $a_i a_{i+1} < 0$ *назовем знакопеременным.*

Теорема 4.10. *Знакопеременный ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *сходится, если* $|a_{i+1}| < |a_i|$ *и* $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = 0$.

Proof. Положим $A_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$. Пусть $a_1 > 0$, тогда последовательность $A_{2n} = \sum\limits_{i=1}^{2n} a_i = (a_1 + a_2) + \dots + (a_{2n-1} + a_{2n}) > 0$ монотонно возрастает и $A_{2n} = a_1 + (a_2 + a_3) + \dots + (a_{2n-2} + a_{2n-1}) + a_{2n} < a_1$. Следовательно, существует конечный предел $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_{2n}$. Но тогда $\lim\limits_{n\to\infty} A_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} (A_{2n} + a_{2n+1}) = A$. Отсюда следует, что $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$. □

Пример 4.4. *При* $0 < s \le 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$ *условно сходится.*

5. Функциональные ряды и ряды Тейлора

5.1. **Разложение Тейлора.** На протяжении этого параграфа $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[a, b]$. Символом $f^{(n)}(x)$ будет обозначаться результат n-кратного дифференцирования функции f.

Теорема 5.1 (теорема Тейлора-Коши)**.** *Пусть функция* $f^{(n)}(x)$ *существует и непрерывна на отрезке* $[a, b]$. *Тогда*

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots$$
$$\dots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \int\limits_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, dt.$$

Proof. Будем доказывать эту формулу индукцией по n. Для $n = 1$ утверждение теоремы совпадает с формулой Ньютона-Лейбница $f(b) = f(a) + \int\limits_a^b f'(t)\, dt$. Предположим, что теорема доказана для $n \le N$ и функция $f^{(N+1)}(x)$ непрерывна. Интегрируя по частям и используя предположение индукции, находим, что

$$\int\limits_a^b \frac{(b-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t)\, dt =$$
$$= \int\limits_a^b \frac{(b-t)^N}{N!} (f^{(N)}(t))'\, dt = \frac{(b-t)^N}{N!} f^{(N)}(t)\Big|_a^b + \int\limits_a^b \frac{(b-t)^{N-1}}{(N-1)!} f^{(N)}(t)\, dt =$$
$$= -\frac{(b-a)^N}{N!} f^{(N)}(a) + f(b) - \Big(f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^{(N-1)}}{(N-1)!} f^{(N-1)}(a)\Big).$$

Таким образом,

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1!}f'(a)+\dots+\frac{(b-a)^N}{N!}f^{(N)}(a)+\int\limits_a^b\frac{(b-t)^N}{N!}f^{(N+1)}(t)$$

$\square$

Теорема 5.2 (теорема Тейлора-Лагранжа)**.** *Пусть функция $f^{(n)}(x)$ существует на отрезке $[a,b]$. Тогда существует точка $c\in[a,b]$, такая что*

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\dots$$
$$\dots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(c).$$

Proof. Положим $r(x)=f(b)-(f(x)+\frac{b-x}{1!}f'(x)+\frac{(b-x)^2}{2!}f''(x)+\dots+\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x))$ и $l(x)=-(b-x)^n$. Тогда $r(b)=l(b)=0$. Применяя теорему Коши 2.10 к паре функций $r(x)$ и $l(x)$ находим, что $\frac{r(a)}{l(a)}=\frac{r(b)-r(a)}{l(b)-l(a)}=\frac{r'(c)}{l'(c)}$ для некоторого $c\in[a,b]$. С другой стороны, $l'(x)=n(b-x)^{n-1}$ и

$$r'(x)=-(f'(x)-f'(x)+\frac{b-x}{1!}f''(a)+\dots-\frac{(b-x)^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n-1)}(x)+\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x))=$$

$-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)$. Таким образом $r(a)=\frac{r'(c)}{l'(c)}l(a)=\frac{(b-c)^{n-1}}{n!}f^{(n)}(c)(b-a)^n$ $\square$

Теорема 5.3 (теорема Тейлора-Юнга)**.** *Пусть функция $f^{(n)}(x)$ существует и непрерывна на $[a,b]$ и $x_0\in(a,b)$. Тогда*

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1!}f'(x_0)+\dots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+h^no(1)$$

при $h\to0$.

Proof. Утверждения и доказательства теоремы Тейлора-Лагранжа 5.2 остаются верными и при $b<a$. Таким образом,

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1!}f'(x_0)+\dots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(c),$$

где $x_0+h\in[a,b]$, $c\in[x_0-|h|,x_0+|h|]$. Рассмотрим функцию

$$g(h)=\frac{1}{h^n}\left(\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(c)-\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0)\right).$$

Тогда $\lim\limits_{h\to0}g(h)=0$. Следовательно, $\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(c)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+h^no(1)$ при $h\to0$. $\square$

Следствие 5.1. *Пусть функция $f^{(n)}(x)$ существует и непрерывна на $[a,b]$ и $x_0\in(a,b)$. Тогда функция f единственным образом представляется в виде*

$$f(x)=f(x_0)+a_1(x-x_0)+\dots+a_n(x-x_0)^n+r_n(x_0,x),$$

где $r_n(x_0,x)=(x-x_0)^n\int\limits_0^1\frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x+(x-x_0)t)\,dt=(x-x_0)^n\frac{f(n)(x+(x-x_0)\theta)}{n!}=o((x-x_0)^n)$ при $x\to x_0$. Более того, $a_i=\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}$. Такое разложение называется разложением Тейлора степени n в окрестности точки x_0. .

Proof. Все утверждения следствия кроме единственности разложения Тейлора следуют из теоремы 5.3 и теорем 5.1,5.2 после замены $[a,b]$ на $[x_0,x]$. Пусть существует другое разложение Тейлора $f(x) = f(x_0) + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n o(1)$ и a_k — первый из коэффициентов, неравных $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$. Тогда $0 = (\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} - a_k)(x-x_0)^k + (x-x_0)^k o(1)$, что невозможно. □

Разложение Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ называется *разложением Маклорена.*

Задача 5.1. *Докажите существование следующих разложений Маклорена:*

1) $a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!}x + \dots + \frac{\ln^n a}{n!}x^n + x^n o(1)$ *и, в частности,* $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n o(1)$;

2) $\mathtt{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}o(1)$;

3)$\mathtt{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}o(1)$;

4) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}o(1)$;

5) $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}o(1)$;

6) $(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n o(1)$;

7) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + x^n o(1)$.

Задача 5.2. *Как выражаются разложения Тейлора функций $f+g$, fg, f^{-1} и $f\circ g$ через разложения Тейлора функций f и g?*

Разложения Тейлора удобны для поиска пределов и исследования рядов на сходимость.

Пример 5.1. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2\cos x}{x^2(1-\cos x)}$.

Используя разложения $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^4 o(1)$ *и* $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 o(1)$ *находим, что*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2\cos x}{x^2(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(x-\frac{x^3}{6}+x^4o(1))^2 - x^2(1-\frac{x^2}{2}+x^3o(1))}{x^2(1-(1-\frac{x^2}{2}+x^3o(1)))} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{6}+x^5o(1)}{\frac{x^4}{2}+x^5o(1)} = \frac{1}{3}.$$

Пример 5.2. *Исследуем сходимость ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i(p)$, *где* $b_n(p) = (1 - p\frac{\ln n}{n})^n$.

При $n\to\infty$, *находим, что* $\ln b_n(p) = n\ln(1 - p\frac{\ln n}{n}) = n(-p\frac{\ln n}{n} + (p\frac{\ln n}{n})^2 O(1)) = -p\ln n + (p^2\frac{\ln^2 n}{n})O(1) = -p\ln n + o(1)$. *Таким образом* $b_n(p) = \frac{h(n)}{n^{-p}}$, *где* $\lim\limits_{n\to\infty} h(n) = 1$. *Следовательно ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i(p)$ *сходится при* $p>1$ *и расходится при* $p\le 1$.

Отсюда следует признак Жамэ: 1)если $(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n} > p > 1$, *то* $a_n < b_n(p)$ *и ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *сходится; 2)если* $(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n} \le 1$, *то* $a_n > b_n(1)$ *и ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *расходится.*

Теорема 5.4. *Пусть разложение Маклорена степени n* $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i + x^n\alpha(x)$ *таково, что функция $\alpha'(x)$ существует и непрерывна в окрестности точки 0. Тогда*

1) $f'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + x^{n-1}o(1)$;

2) $\int\limits_0^x f(t)\,dt = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + x^{n+1}o(1)$.

Proof. 1) Мы имеем $f'(x) = \Big(\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i\Big)' + nx^{n-1}\alpha(x) + x^n\alpha'(x) = \Big(\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i\Big)' + x^{n-1}o(1)$.

2) Мы имеем $\int\limits_0^x f(t)\,dt = \int\limits_0^x (\sum\limits_{i=0}^{n} a_i t^i)\,dt + \int\limits_0^x (t^n\alpha(t))\,dt =$
$\sum\limits_{i=1}^{n+1} b_i x^i + \frac{x^{n+1}}{n+1}\alpha(x) - \int\limits_0^x (\frac{t^{n+1}}{n+1})\alpha'(t)\,dt = \sum\limits_{i=1}^{n+1} b_i x^i + x^{n+1}\beta(x)$, где $b_i = \frac{a_{i-1}}{i!}$ и $\beta(x) = o(1)$ в окрестности точки 0. □

Определение 5.1. *Функция* $r_n(x_0, h) = f(x_0 + h) - (f(x_0) + \frac{h}{1!}f'(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}$ *называется остаточным членом формулы Тейлора. Она имеет различные представление. Представления* $r_n(x_0, h) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}h^n, c \in [x_0, x_0 + h]$ *и* $r_n(x_0, h) = \int\limits_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0+h-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt$ *называются представлениями в форме Лагранжа и Коши соответственно*

Определение 5.2. *Ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ *называется рядом Тейлора бесконечно дифференцируемой функции* $f(x)$ *в точке* x_0*. При* $x_0 = 0$ *ряд Тейлора называется также рядом Маклорена.*

Задача 5.3. *Докажите, что ряд Тейлора бесконечно дифференцируемой функции* $f(x)$ *сходится к* $f(x)$ *в точке* x_0*, если и только если* $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x_0, h) = 0$.

Задача 5.4. *Могут ли разные бесконечно дифференцируемые функции иметь одинаковые ряды Тейлора (Подсказка: сравнить 0 и* $\exp -x^{-2}$*)*

5.2. **Функциональные ряды.** Рассмотрим последовательность функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ на подмножестве $L \subset \mathbb{R}$. Мы уже отмечали, что существует два понятия сходимости функций $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$:

1. поточечная сходимость, когда $\forall x \in L : \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$;
2. равномерная сходимость, когда $\forall\,\epsilon > 0\,\exists\, m \in \mathbb{N}\,\forall\,(n > m, x \in L)\colon |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Определение 5.3. *Бесконечная последовательность функций, соединенных знаком* $+$*, то есть выражение вида* $a_1(x) + a_2(x) + \cdots = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(x)$*, называется функциональным рядом. Функции* $A_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x)$ *называются частичными суммами ряда. Говорят, что ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(x)$ *поточечно сходится к функции* $A(x)$*, если последовательность функций* $A_n(x)$ *сходится к функции* $A(x)$ *поточечно. Говорят, что ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(x)$ *равномерно сходится к функции* $A(x)$*, если последовательность функций* $A_n(x)$ *равномерно сходится к функции* $A(x)$.

Теорема 5.5. *[теорема Коши] Функциональный ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(x)$ *равномерно сходится, если и только если* $\forall\,\epsilon > 0\,\exists\, m \in \mathbb{N}\,\forall\,(x \in L, n > m$ *и* $l \geq 0)\colon \left|\sum\limits_{i=n}^{n+l} a_i(x)\right| < \epsilon$.

Proof. Если ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(x)$ сходится равномерно к функции $A(x)$, то $\forall \epsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall (n, n' \geq m, x \in L)$: $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x) - A(x)\right| \leq \frac{\epsilon}{2}$, $\left|\sum\limits_{i=1}^{n'} a_i(x) - A(x)\right| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Отсюда $\left|\sum\limits_{i=n}^{n+l} a_i(x)\right| = \left|\sum\limits_{i=1}^{n+l} a_i(x) - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x)\right| \leq \left|\sum\limits_{i=1}^{n+l} a_i(x) - A(x)\right| + \left|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x) - A(x)\right| < \epsilon$. Пусть теперь $\forall \epsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall (n > m, l > 0, x \in L)$: $\left|\sum\limits_{i=n}^{n+l} a_i(x)\right| < \epsilon$. Тогда для каждого $x_0 \in L$ последовательность $A_n(x_0) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x_0)$ удовлетворяет критерию Коши, и, следовательно, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(x)$ поточечно сходится к некоторой функции $A(x)$. Докажем, что эта сходимость равномерная. Действительно, $\forall (n > m, x \in L)$: $\left|A(x) - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x)\right| = \lim\limits_{l\to\infty}\left|\sum\limits_{i=1}^{n+l} a_i(x) - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x)\right| \leq \epsilon$. □

Следствие 5.2. *Линейная любая комбинация равномерно сходящихся рядов образует равномерно сходящийся ряд.*

Определение 5.4. *Пусть $|a_i(x)| \leq c_i(x)$ при всех i и $x \in L$. Тогда говорят, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i(x)$ мажорирует ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(x)$ на множестве L.*

Следствие 5.3. *Пусть ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i(x)$ мажорирует ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(x)$ на множестве L и ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i(x)$ равномерно сходится на L. Тогда и ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(x)$ тоже равномерно сходится на L.*

Proof. Согласно теореме 5.5, мы имеем $\forall \epsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m\ \forall (l > 0, x \in L)$: $\sum\limits_{i=n}^{n+l} c_i(x) < \epsilon$, и, следовательно, $\left|\sum\limits_{i=n}^{n+l} a_i(x)\right| \leq \sum\limits_{i=n}^{n+l} |a_i(x)| \leq \sum\limits_{i=n}^{n+l} c_i(x) < \epsilon$. Согласно теореме 5.5, отсюда следует равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(x)$. □

Теорема 5.6. *Пусть ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(x)$ равномерно сходится на $(A, B]$, где $A \in \mathbb{R}$ или $A = -\infty$. Предположим, что предел $\lim\limits_{x\to A} \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(x)$ и пределы $\lim\limits_{x\to A} a_i(x)$ существуют для любого i . Тогда ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lim\limits_{x\to A} a_i(x)$ сходится и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lim\limits_{x\to A} a_i(x) = \lim\limits_{x\to A} \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(x)$.*

Proof. Положим $a(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(x)$, $\bar{a} = \lim\limits_{x\to A} a(x)$ и $\bar{a}_i = \lim\limits_{x\to A} a_i(x)$. В виду равномерной сходимости $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ m \in \mathbb{N},\ \forall n > m$: $|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x) - a(x)| < \varepsilon$ и, следовательно, $|\sum\limits_{i=1}^{n} \bar{a}_i - \bar{a}| < \varepsilon$. □

Задача 5.5. *Докажите, что существование* $\lim\limits_{x\to A}\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(x)$ *следует из остальных условий теоремы*

Следствие 5.4. *Если функции* $a_i(x)$ *непрерывны и ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(x)$ *равномерно сходится на* L*, то функция* $a(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(x)$ *тоже непрерывна на* L.

Proof. Пусть $A\in L$. Тогда, в виду теореме 5.6 и непрерывности функций $a_i(x)$, $\lim\limits_{x\to A} a(x)=\lim\limits_{x\to A}\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\lim\limits_{x\to A} a_i(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(A)=a(A)$ □

Задача 5.6. *Пусть ряд положительных непрерывных функций на отрезке* $[a,b]$ *поточечно сходится к непрерывной функции. Докажите, что тогда он сходится на* $[a,b]$ *равномерно.*

Теорема 5.7. *Пусть ряд непрерывных функций* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(x)$ *равномерно сходится на отрезке* $L=[A,B]$*. Тогда* $\int\limits_A^B\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(x)\right)dx=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\int\limits_A^B a_i(x)\,dx\right)$.

Proof. Интегрируемость функции $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(x)$ следует из следствия 5.4. Кроме того, согласно теореме 5.5, мы имеем $\forall\epsilon>0\ \exists m\in\mathbb{N}\ \forall n>m,\ \forall x\in L$: $\left|\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i(x)\right|<\epsilon$ и, следовательно, $\left|\int\limits_A^B\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(x)\right)dx-\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\int\limits_A^B a_i(x)\,dx\right)\right|=\left|\int\limits_A^B\left(\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} a_i(x)\right)dx\right|\le\int\limits_A^B\left|\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} a_i(x)\right|dx\le$
$\int\limits_A^B\epsilon\,dx=\epsilon(B-A)$. □

Теорема 5.8. *Пусть ряд дифференцируемых функций* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(x)$ *сходится в точке* A*, а ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i'(x)$ *равномерно сходится на* $[A,B]$*. Тогда ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(x)$ *равномерно сходится на отрезке* $[A,B]$ *и* $\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(x)\right)'=\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i'(x)$.

Proof. Докажем, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{a_i(x)-a_i(A)}{x-A}$ равномерно сходится на множестве $L=(A,B]$. Согласно теореме 5.5, мы имеем $\forall\epsilon>0\ \exists m\in\mathbb{N}\ \forall(x\in L,n>m,l>0)$: $\left|\sum\limits_{i=n}^{n+l} a_i'(x)\right|<\epsilon$. Применяя теорему Лагранжа к функции $\sum\limits_{i=n}^{n+l} a_i(x)$, находим, что $\left|\sum\limits_{i=n}^{n+l}\frac{a_i(x)-a_i(A)}{x-A}\right|=\left|\frac{\sum\limits_{i=n}^{n+l} a_i(x)-\sum\limits_{i=n}^{n+l} a_i(A)}{x-A}\right|=\left|\sum\limits_{i=n}^{n+l} a_i'(c)\right|<\epsilon$, где $c\in(A,B)$.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(x) = (x-A)\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{a_i(x)-a_i(A)}{x-A} + \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(A)$. Применяя теоремы Коши (теорема 5.5 и задача 4.2) к рядам $(x-A)\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{a_i(x)-a_i(A)}{x-A}$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(A)$, находим, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(x)$ удовлетворяет критерию Коши (теорема 5.5) на $[A,B]$ и, следовательно, равномерно сходится на $[A,B]$. Согласно следствию 5.4 функция $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(x)$ непрерывна на $[A,B]$ и поэтому, ввиду теоремы 5.6, $\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i\right)'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(x) - \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(x_0)}{x-x_0}\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\lim\limits_{x\to x_0}\frac{a_i(x)-a_i(x_0)}{x-x_0}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i'(x_0)$. □

5.3. **Степенные ряды.** Ряд вида $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i(x-x_0)^i$ называется *степенным.* Для простоты обозначений мы будем считать, что $x_0 = 0$, но все результаты легко обобщаются на случай произвольных точек $x_0 \in \mathbb{R}$.

Задача 5.7. *Докажите, что, любой сходящийся к функции f в окрестности 0 степенной ряд совпадает с рядом Тейлора этой функции.*

Определение 5.5. *Пусть $\{a_i\}$ — произвольная последовательность.* Верхним пределом $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}} a_i$ *называется наибольший из конечных и бесконечных пределов последовательностей вида $\lim\limits_{n\to\infty} a_{i_n}$.*

Задача 5.8. *Докажите, что верхний предел (конечный или бесконечный) всегда существует.*

Определение 5.6. *Число $D = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{i\to\infty}}\sqrt[i]{|a_i|}}$ называется радиусом сходимости степенного ряда $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$.*

Теорема 5.9. *Пусть D — радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$. Тогда ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ расходится при $|x| > D$, абсолютно сходится при $|x| < D$ и равномерно сходится на $L = [-d,d]$, где $0 < d < D$.*

Proof. По определению $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}}\sqrt[i]{|a_i|} = \frac{1}{D}$. Если $D < |x|$, то существует бесконечное число i, таких, что $\frac{1}{x} < \sqrt[i]{|a_i|} \le \frac{1}{D}$. В этом случае $|a_i x^i| > 1$ и, следовательно, ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ расходится.

Если $D > d > |x|$, то, начиная с некоторого i, $\sqrt[i]{|a_i x^i|} \le \frac{|x|}{D} < \frac{d}{D} < 1$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ абсолютно сходится по признаку Коши (теорема 4.3). Кроме того, $\sqrt[i]{|a_i d^i|} \le \frac{d}{D} < 1$ и, следовательно, ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} |a_i| d^i$ также сходится.

Но функциональный ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ мажорируется на L числовым рядом $\sum\limits_{i=0}^{\infty} |a_i| d^i$ и, следовательно, равномерно сходится на L согласно следствию 5.3. $\square$

Следствие 5.5. *Пусть D — радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$. Тогда его сумма $a(x)$ является бесконечно дифференцируемой функцией на $(-D, D)$, $a'(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1}$ и при $0 < d < D$ выполнено равенство $\int\limits_0^d a(x)\,dx = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i+1} d^{i+1}$.*

Proof. Пусть $d < D$. Радиусы сходимости рядов $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ и $\sum\limits_{i=0}^{\infty} (a_i x^i)' = \sum\limits_{i=0}^{\infty} i a_i x^{i-1}$ равны D. Поэтому, согласно теореме 5.9, они равномерно сходятся на $L = [-d, d]$. Таким образом, согласно теореме 5.8, $a'(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} (a_i x^i)' = \sum\limits_{i=0}^{\infty} i a_i x^{i-1}$. Продолжая процесс дифференцирования, находим, что $a^{(n)}(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} (a_i x^i)^{(n)}$. Равенство $\int\limits_0^d a(x)\,dx = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i+1} d^{i+1}$ следует из теоремы 5.7. $\square$

Следствие 5.6. *Ряд Тейлора равномерно сходится на отрезке $[-d, d]$, где $0 < d < \frac{1}{\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \sqrt[i]{f^{(i)}(0)/i!}}$.*

Теорема 5.10. *Пусть $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция на отрезке $L = [-d, d]$ и $|f^{(n)}(x)| < C \in \mathbb{R}$ при $x \in L$. Тогда ряд Тейлора функции f сходится к f на L.*

Proof. Согласно теореме Тейлора-Лагранжа 5.2, $|f - \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i| = f^{(n)}(c) \frac{x^n}{n!} < C \frac{d^n}{n!}$. С другой стороны, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{d^n}{n!} = 0$. $\square$

Задача 5.9. *Пусть $a(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $b(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ и радиус сходимости рядов равен ∞. Какими степенными рядами представляются функции $a(x) \pm b(x)$, $a(x)b(x)$ и $a(b(x))$?*

Задача 5.10. *Найдите радиус сходимости гипергеометрического ряда Гаусса (пример-определение 4.1) и докажите, что*

$$(1+z)^\alpha = F(-\alpha, 1, 1, -z), \alpha \in \mathbb{R}, \quad \ln\Big(\frac{1+z}{1-z}\Big) = 2zF\Big(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, z^2\Big),$$
$$\ln(1+z) = zF(1, 1, 2, -z), \quad \arcsin z = zF\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, z^2\Big),$$
$$\arctan z = zF\Big(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, -z^2\Big), \quad \exp(z) = \lim_{b\to\infty} F\Big(1, b, 1, \frac{z}{b}\Big).$$

6. Топология пространств $\mathbb{R}^n$

6.1. **Открытые и замкнутые множества.**

Определение 6.1. *Напомним, что векторное пространство $\mathbb{R}^n$ состоит из точек $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$, где $x^i \in \mathbb{R}$. Расстояние между точками определяется формулой $d(x_1, x_2) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_1^i - x_2^i)^2}$. Положим $|x| = d(x, 0)$.*

Роль интервала играют *открытые шары* $B(a,\delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a,x) < \delta\}$.

Определение 6.2. *Множество $G \subset \mathbb{R}^n$ называется открытым, если*

$$\forall\, x \in G\ \exists\, \delta > 0 \colon B(x, \delta) \subset G.$$

Пустое множество также считается открытым.

Примеры открытых множеств

1. Открытый брусок $G(a^1,b^1,\dots,a^n,b^n) = \left\{ \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \mid a^i < x^i < b^i \right\}$.
2. Открытый шар $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a, x) < r\}$.
3. Внешность шара $\{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a, x) > r\}$.

Теорема 6.1. 1) *Объединение любого числа открытых множеств открыто.* 2) *Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.*

Proof. 1) Первое утверждение очевидно. 2) Пусть множества $G_1, \dots, G_n$ открыты, $a \in \bigcap\limits_i G_i$ и $B(a, \delta_i) \subset G_i$. Тогда $B(a, \min(\delta_1, \dots, \delta_n)) \subset \bigcap\limits_i G_i$. □

Пересечение бесконечного числа открытых множеств может и не быть открытым. Например, множество $\bigcap\limits_{\delta>0} B(a, \delta) = \{a\}$ не открыто.

Определение 6.3. *Открытое множество, содержащее точку x, называется окрестностью точки x.*

Определение 6.4. *1. Точка x называется внутренней точкой множества E, если она имеет окрестность $B \ni x$, такую что $B \subset E$.*

2. Точка $x \in \mathbb{R}^n$ называется внешней для множества E, если она внутренняя для $\mathbb{R}^n \setminus E$.

3. Множество точек пространства $\mathbb{R}^n$, не являющихся ни внешними, ни внутренними для множества E, образует границу ∂E множества E.

Пример 6.1. *Граница шара $\partial B(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a, x) = \delta\} \subset \mathbb{R}^n$.*

Определение 6.5. *Множество $F \subset \mathbb{R}^n$ называется замкнутым, если его дополнение $\mathbb{R}^n \setminus F$ открыто.*

Примеры замкнутых множеств

1. Замкнутый шар $\bar{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a, x) \le r\}$.
2. Замкнутый брусок $F(a^1, b^1, \dots, a^n, b^n) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \le x^i \le b^i\}$.

Задача 6.1. *Может ли множество быть одновременно открытым и замкнутым?*

Задача 6.2. *Докажите, что пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто. Докажите, что объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто. Верно ли последнее утверждение для любого числа замкнутых множеств?*

Определение 6.6. *Точка $x \in \mathbb{R}^n$ называется предельной для множества $E \subset \mathbb{R}^n$, если любая ее окрестность содержит бесконечное число точек из E.*

Определение 6.7. *Объединение множества E и его предельных точек называется замыканием множества E и обозначается $\bar{E}$.*

Пример 6.2. *Замыканием открытого шара $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a,x) < r\}$ является замкнутый шар $\bar{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a,x) \leq r\}$.*

Теорема 6.2. *Множество замкнуто, если и только если его замыкание совпадает с ним самим.*

Proof. 1) Если множество F замкнуто, то множество $\mathbb{R}^n \setminus F$ открыто; это означает, что любая точка $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$ имеет окрестность, лежащую в $\mathbb{R}^n \setminus F$ и, значит, не содержащую точек множества F. Таким образом, точка x не предельная для F, следовательно, все предельные точки множества F лежат в F и $\bar{F} = F$. 2) Пусть теперь $\bar{F} = F$. Тогда любая точка $x \in \mathbb{R}^n \setminus F = \mathbb{R}^n \setminus \bar{F}$ не является предельной, то есть имеет окрестность, содержащую лишь конечное число точек из F. Но тогда точка x имеет окрестность, не содержащую точек из F, то есть множество $\mathbb{R}^n \setminus F$ открыто, а F замкнуто. □

6.2. **Компакты в $\mathbb{R}^n$.**

Определение 6.8. *Множество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется компактом, если из любого покрытия открытыми множествами $K \subset \bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ можно выбрать конечное подпокрытие $K \subset G_{\alpha_1} \cup \dots \cup G_{\alpha_k}$.*

Лемма-пример 6.1. *Замкнутый брусок*

$$F(a^1, b^1, \dots, a^n, b^n) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \leq x^i \leq b^i\}$$

является компактом.

Proof. Пусть из покрытия открытыми множествами $F \subset \bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha$ нельзя выбрать конечное подпокрытие. Разбив каждую сторону бруска F пополам, получим 2^n брусков. Хотя бы один из них не покрывается конечным подмножеством покрытия G_α. Обозначим этот брусок F_1. Продолжая этот процесс, найдем последовательность брусков $F \supset F_1 \supset F_2 \supset \dots$, каждый из которых не покрывается конечным подмножеством покрытия $\{G_\alpha\}$. Их пересечение имеет общую точку $x \in F$. Она содержится в некотором множестве G_α, и, значит, существует шар $B(x,\delta) \subset G_\alpha$. Но тогда $F_i \subset B(x,\delta) \subset G_\alpha$ при достаточно большом i, что противоречит выбору бруска F_i. □

Лемма 6.1. *Компакт замкнут.*

Proof. Пусть K — компакт и $a \notin K$. Для каждой точки $x \in K$ существует окрестность $x \in G(x) = B(x, \rho_x)$, такая что $a \notin G(x)$. Из покрытия $K \subset \bigcup\limits_{x \in K} G(x)$

выберем конечное покрытие $K \subset G(x_1) \cup \cdots \cup G(x_m)$. Положим $\delta_i = d(a, x_i) - \rho_{x_i}$ и $\delta < \min_i \delta_i$. Тогда $B(a,\delta) \cap G(x_i) = \varnothing$. Следовательно,

$$B(a,\delta) \cap K \subset B(a,\delta) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m} G(x_i)\right) = \bigcup_{i=1}^{m} (B(a,\delta) \cap G(x_i)) = \varnothing,$$

то есть a — не предельная точка множества K. Таким образом, все предельные точки множества K лежат в K, то есть $\bar{K} = K$. □

Лемма 6.2. *Замкнутое подмножество компакта является компактом.*

Proof. Пусть F — замкнутое подмножество компакта K, $F \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$ — произвольное покрытие открытыми множествами и $G = \mathbb{R}^n \setminus F$. Тогда $K \subset G \cup \left(\bigcup_\alpha G_\alpha\right)$ — покрытие компакта открытыми множествами. Выделим конечное подпокрытие $F \subset K \subset G \cup G_{\alpha_1} \cup \cdots \cup G_{\alpha_m}$; так как $G \cap F = \varnothing$, мы получаем, что $F \subset G_{\alpha_1} \cup \cdots \cup G_{\alpha_m}$. □

Определение 6.9. *Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется ограниченным, если оно принадлежит некоторому шару $E \subset B(a, r)$.*

Лемма 6.3. *Компакт ограничен.*

Proof. Пусть K — компакт. Рассмотрим множество всех открытых шаров $B_r = B(0, r)$. Тогда $K \subset \mathbb{R}^n \subset \bigcup_r B_r$. Выделим теперь конечное подпокрытие в покрытии $\{B_r\}$. □

Теорема 6.3. *Множество $K \subset \mathbb{R}^n$ является компактом, если и только если оно ограничено и замкнуто.*

Proof. Если множество K — компакт, то согласно леммам 6.1 и 6.3, оно ограничено и замкнуто. Если множество K ограничено, то оно лежит в некотором замкнутом бруске $K \subset I = F(a^1, b^1, \ldots, a^n, b^n)$, который является компактом, согласно лемме 6.1. Если, кроме того, множеств K замкнуто, то, согласно лемме 6.2, оно является компактом. □

Определение 6.10. *Говорят, что последовательность $x_1, x_2 \cdots \in \mathbb{R}$ имеет предел x или* сходится к *x, если $\forall \epsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N \colon d(x_n, x) < \epsilon$, то есть $x_n \in B(x, \epsilon)$.*

Задача 6.3. *Докажите, что множество K является компактом, если и только если из любой последовательности $x_1, x_2, \cdots \in K$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $x \in K$.*

Определение 6.11. *Последовательность $x_1, x_2, \cdots \in \mathbb{R}^n$ называется последовательностью Коши, если $\forall \epsilon > 0\ \exists N\ \forall (n_1, n_2 > N) \colon d(x_{n_1}, x_{n_2}) < \epsilon$.*

Задача 6.4. *Докажите, что последовательность является последовательностью Коши тогда и только тогда, когда она сходится.*

6.3. **Непрерывные отображения.**

Определение 6.12. *Пусть* $E \subset \mathbb{R}^n$. *Отображение* $f\colon E \to \mathbb{R}^m$ *называется* непрерывным *в точке* $x_0 \in E$, *если*

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in B(x_0, \delta) \cap E\colon f(x) \in B(f(x_0), \epsilon).$$

Задача 6.5. *Докажите, что отображение* $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ *непрерывно в точке* $x \in E$, *если и только если* f *переводит любую сходящуюся к* x *последовательность* $\{x_n\} \subset E$ *в последовательность, сходящуюся к* $f(x)$.

Теорема 6.4. *Суперпозиция непрерывных отображений непрерывна.*

Proof. Пусть отображение $f\colon E \to \mathbb{R}^m$ непрерывно в точке $x_0 \in E$, а отображение $g\colon f(E) \to \mathbb{R}^k$ непрерывно в точке $f(x_0)$. Рассмотрим $\epsilon > 0$. Тогда

$$\exists\, \delta_1 > 0\ \forall\, f(x) \in B(f(x_0), \delta_1) \cap f(E)\colon g(f(x)) \in B(g(f(x_0)), \epsilon)$$

и

$$\exists\, \delta_2 > 0\ \forall\, x \in B(x_0, \delta_2) \cap E\colon f(x) \in B(f(x_0), \delta_1).$$

Таким образом, $\forall\, x \in B(x_0, \delta_2) \cap E\colon g(f(x)) \in B(g(f(x_0)), \epsilon)$. А это и означает непрерывность функции $g \circ f$ в точке x_0. □

Определение 6.13. *Отображения вида* $f\colon E \to \mathbb{R}$ *называются функциями.*

Задача 6.6. *Докажите, что отображение* $f\colon E \to \mathbb{R}^n$, *где* $f(x) = (f^1(x), \ldots, f^n(x))$, *является непрерывным, если и только если все функции* f^i *непрерывны.*

Функция может быть непрерывна по каждой переменной в отдельности, при фиксированных остальных переменных, но не быть непрерывной от совокупности переменных.

Пример 6.3. *Пусть*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{при } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{при } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Тогда $f(0, y) = f(x, 0) = 0$, *но* $f(x, x) = \frac{1}{2}$.

Теорема 6.5. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны в точке* $x_0 \in E$. *Тогда функции* $f + g$, fg *и* f/g *(если* $g(x_0) \neq 0$*) тоже непрерывны в точке* x_0.

Proof. Пусть $\epsilon > 0$. Тогда

$$\exists\, \delta_1 > 0\ \forall\, x \in B(x_0, \delta_1) \cap E\colon |f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$$

и

$$\exists\, \delta_2 > 0\ \forall\, x \in B(x_0, \delta_2) \cap E\colon |g(x) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда $\forall\, x \in B(x_0, \delta)$:

$$|(f + g)(x) - (f + g)(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - x(x_0)| < \epsilon.$$

□

Задача 6.7. *Докажите остальные утверждения теоремы.*

Определение 6.14. *Говорят, что отображение $f\colon E \to \mathbb{R}^m$ непрерывно на E, если оно непрерывно в каждой точке множества E.*

Лемма 6.4. *Пусть отображение $f\colon E \to \mathbb{R}^m$ непрерывно на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Рассмотрим открытое множество $V \subset \mathbb{R}^m$ и его прообраз $U = \{x \in E | f(x) \in V\} \equiv f^{-1}(V)$. Тогда существует открытое множество $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$, такое что $U = \tilde{U} \cap E$.*

Proof. Пусть $x \in U$. Так как множество V открыто, $\exists\, \epsilon_x > 0\colon B(f(x), \epsilon_x) \subset V$. Ввиду непрерывности f $\exists \delta_x > 0\colon f(B(x, \delta_x) \cap E) \subset B(f(x), \epsilon_x) \subset V$. Положим $\tilde{U} = \bigcup\limits_{x \in U} B(x, \delta_x)$. Тогда $\tilde{U} \cap E \supset U$ и $f(\tilde{U} \cap E) \subset \bigcup\limits_{x \in U} B(f(x), \epsilon_x) \subset V$, а значит $\tilde{U} \cap E \subset U$. Таким образом, $\tilde{U} \cap E = U$. □

Теорема 6.6. *Непрерывный образ компакта является компактом.*

Proof. Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^n$ — компакт и отображение $f\colon E \to \mathbb{R}^m$ непрерывно. Рассмотрим произвольное открытое покрытие $\bigcup\limits_{\alpha} V_\alpha \supset f(E)$. Согласно лемме 6.4, существуют открытые множества $\tilde{U}_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, такие что $\tilde{U}_\alpha \cap E = \{x \in E \mid f(x) \in V_\alpha\}$. Таким образом, $\bigcup\limits_{\alpha} \tilde{U}_\alpha \supset E$. Выберем конечное покрытие $\tilde{U}_{\alpha_1} \cup \dots \cup \tilde{U}_{\alpha_n} \supset E$. Тогда $V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_n} \supset f(E)$. □

Следствие 6.1. *Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$, непрерывная на компакте E, достигает на нем максимума и минимума.*

Proof. Согласно теоремам 6.6 и 6.3, множество $f(E)$ ограниченно и замкнуто. Поэтому величина $M = \sup\limits_{x \in E} f(x)$ конечна и принадлежит множеству $f(E)$. Следовательно, существует точка $x_0 \in E$ (точка максимума), такая что $f(x_0) = M$. Существование минимума доказывается аналогично. □

7. Дифференцируемые функции многих переменных

7.1. **Дифференциал функции.** Далее, если не оговорено противное, мы считаем, что все рассматриваемые отображения определены на открытом подмножестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Точка $x \subset \mathbb{R}^n$ описывается вектором-столбцом своих координат $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$. Через $|x| = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2}$ будет обозначаться длина вектора x.

Определение 7.1. *Отображение $f : E \to \mathbb{R}$ называется функцией многих переменных. Говорят, что функция $\alpha\colon E \to \mathbb{R}$ есть "о малое" от функции $\beta\colon E \to \mathbb{R}$ (пишут $\alpha = o(\beta)$) при $x \to a$, если существует функция $\gamma\colon E \to \mathbb{R}$ такая, что $\alpha(x) = \beta(x)\gamma(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} \gamma(x) = 0$.*

Следующее определение продолжает определение дифференцируемости для функции одной переменной из раздела 2.3 на функции многих переменных.

Определение 7.2. *Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ называется дифференцируемой в точке x, если существует линейная функция $L_x\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, такая что*

$$f(x+h) - f(x) = L_x(h) + o(|h|)$$

при $h \to 0$. Оператор $L_x \in (\mathbb{R}^n)^*$ называется дифференциалом функции f в точке x и обозначается

$$L_x = df_x.$$

Если функцияf дифференцируема в каждой точке множества E, то говорят, что она дифференцируема на E.

Таким образом дифференцируема на $E \subset \mathbb{R}^n$ функция порождает отображение множества E в пространство $(\mathbb{R}^n)^*$ линейных функций на $\mathbb{R}^n$.

Пример 7.1. *Дифференциал линейной формы $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ постоянен и совпадает с ней самой во всех точках пространства $\mathbb{R}^n$.*

Задача 7.1. *Докажите, что дифференцируемая функция непрерывна.*

Любое линейное отображение $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет вид $L(h) = ah$, где $a \in \mathbb{R}$. Таким образом, если $f\colon E \to \mathbb{R}$ функция одной переменной (то есть $E \subset \mathbb{R}$) ее дифференцируемость означает существование числа $a(x) \in \mathbb{R}$ такого, что $f(x+h) - f(x) = a(x)h + o(|h|)$ при $h \to 0$. Это полностью согласуется нашим первым определение дифференцируемости функции одной переменной. Число $a(x)$ этим свойством называлось при этом "производной $f'(x)$ функции f в точке x". Таким образом

$$df_x(h) = f'(x)h$$

Если функция $f(x)$ дается явной формулой от x, то дифференциал df_x функции f в точке x часто обозначается df, где f — эта явная формула. Если, например, $f(x) = x^n$, то $dx^n(h) = df_x(h) = (x^n)'h = nx^{n-1}h$. В частности $dx(h) = h$, то есть линейная функция dx — тождественная функция.

Для функции одной переменной $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ отсюда следует, что $df_x(h) = L_x(h) = f'(x)h = f'(x)dx(h)$. Что означает равенство линейных по h функций $df_x = f'(x)dx$ в каждой точке $x \in E$, то есть

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x).$$

Перейдем к вычислению операторов df_x для функций произвольного числа переменных.

Определение 7.3. *Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$ — произвольная функция на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Предел*

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \lim_{t\to 0} \frac{f\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^i + t \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}}{t},$$

если он существует, называется частной производной функции f в точке $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ по переменной x^i.

Теорема 7.1. *Дифференцируемая в точке $x \in E$ функция f имеет в точке x частные производные по всем переменным x^i и*

$$df_x \begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^n \end{pmatrix} = \Big(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x) \Big) \begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) h^i.$$

Proof. Мы имеем

$$f \begin{pmatrix} x^1 + h^1 \\ \vdots \\ x^n + h^n \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = df_x(h) + o(|h|) = \sum_{j=1}^{n} l_j(x) h^j + o(|h|).$$

В частности,

$$f \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^i + h^i \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = l_i(x) h^i + o(h^i),$$

а, значит, $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = l_i(x)$. □

Определение 7.4. *Матрица $df(x) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x^i}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x) \Big)$ называется матрицей Якоби или якобианом функции f. Согласно теореме 7.1, она описывает дифференциал df.*

Если функция дифференцируема в точке x, то матрица Якоби существует. Но обратное утверждение неверно.

Пример 7.2. *Пусть*

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{при } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{при } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$$

тогда $f \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ и $\partial f / \partial x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \partial f / \partial y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$. Однако функция f разрывна в точке $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (см. пример 6.3) и, следовательно, не дифференцируема.

Теорема 7.2. *Пусть все частные производные $\partial f / \partial x^i$ функции $f \colon E \to \mathbb{R}$ существуют и непрерывны в точке $x \in E$. Тогда функция f дифференцируема в точке x.*

Proof. Согласно теореме Лагранжа и ввиду непрерывности частных производных,

$$f\begin{pmatrix}x^1+h^1\\ \vdots\\ x^n+h^n\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}x^1\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}x^1+h^1\\ \vdots\\ x^n+h^n\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}x^1\\ x^2+h^2\\ \vdots\\ x^n+h^n\end{pmatrix}+f\begin{pmatrix}x^1\\ x^2+h^2\\ \vdots\\ x^n+h^n\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\\ x^3+h^3\\ \vdots\\ x^n+h^n\end{pmatrix}+\dots-$$

$$f\begin{pmatrix}x^1\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix}=\frac{\partial f}{\partial x^1}\begin{pmatrix}x^1+\theta^1h^1\\ x^2+h^2\\ \vdots\\ x^n+h^n\end{pmatrix}h^1+\frac{\partial f}{\partial x^2}\begin{pmatrix}x^1\\ x^2+\theta^2h^2\\ x^3+h^3\\ \vdots\\ x^n+h^n\end{pmatrix}h^2+\dots+\frac{\partial f}{\partial x^n}\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\\ x^3\\ \vdots\\ x^n+\theta^nh^n\end{pmatrix}h^n=$$

$\frac{\partial f}{\partial x^1}h^1+o(|h|)+\dots+\frac{\partial f}{\partial x^n}h^n+o(|h|)$ при $h\to 0$. Таким образом, $f(x+h)-f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}(\partial f/\partial x^i)h^i+o(|h|)$. □

Теорема 7.3. *Если функции $f_1\colon E\to\mathbb{R}^m$, $f_2\colon E\to\mathbb{R}^m$ дифференцируемы в точке x, то функции $\lambda_1f_1+\lambda_2f_2$, f_1f_2 и $\frac{f_1}{f_2}$ при $f_2(x)\neq 0$, то тоже дифференцируемы в точке x, причем $d(\lambda_1f_1+\lambda_2f_2)=\lambda_1df_1+\lambda_2df_2$, $d(f_1f_2)=f_1df_2+f_2df_1$ и $d\Big(\frac{f_1}{f_2}\Big)=\frac{f_2\,df_1-f_1\,df_2}{f_2^2}$.*

Proof. Из наших определений следует $(\lambda_1f_1+\lambda_2f_2)(x+h)-(\lambda_1f_1+\lambda_2f_2)(x)=\lambda_1(f_1(x+h)-f_1(x))+\lambda_2(f_2(x+h)-f_2(x))=\lambda_1df_1h+\lambda_2df_2h+o(|h|)$ и $(f_1f_2)(x+h)-(f_1f_2)(x)=(f_1(x+h)-f_1(x))f_2(x+h)+f_1(x)(f_2(x+h)-f_2(x))=(df_1h+o(|h|))(f_2(x)+df_2h+o(|h|))+f_1(x)(df_2h+o(|h|)=(f_1df_2+f_2df_1)h+o(|h|)$.

Случай $d\Big(\frac{f_1}{f_2}\Big)$ рассматривается аналогично. □

7.2. **Теорема Лагранжа.**

Лемма 7.1. *Пусть функция $f: E\to\mathbb{R}$ дифференцируема на $E\subset\mathbb{R}^n$, функции $x^1,\dots,x^n: I\to\mathbb{R}$ дифференцируемы на $I\subset\mathbb{R}$ и $x(t)=\begin{pmatrix}x^1(t)\\ \vdots\\ x^n(t)\end{pmatrix}\in E$ при всех $t\in I$. Тогда функция $F(t)=f\begin{pmatrix}x^1(t)\\ \vdots\\ x^n(t)\end{pmatrix}$ дифференцируема на I и $F'(t)=df_{x(t)}\begin{pmatrix}(x^1)'(t)\\ \vdots\\ (x^n)'(t)\end{pmatrix}$.*

Proof. Согласно нашим определениям, $F(t+h)-F(t)=f\begin{pmatrix}x^1(t+h)\\ \vdots\\ x^n(t+h)\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}x^1(t)\\ \vdots\\ x^n(t)\end{pmatrix}=$

$$df_{x(t)}\left(\begin{pmatrix}x^1(t+h)\\ \vdots\\ x^n(t+h)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x^1(t)\\ \vdots\\ x^n(t)\end{pmatrix}\right)+o\left(\left|\begin{pmatrix}x^1(t+h)\\ \vdots\\ x^n(t+h)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x^1(t)\\ \vdots\\ x^n(t)\end{pmatrix}\right|\right)=$$

$$df_{x(t)}\begin{pmatrix}(x^1)'(t)h+o(|h|)\\ \vdots\\ (x^n)'(t)h+o(|h|)\end{pmatrix}+o\left(\left|\begin{matrix}(x^1)'(t)h+o(|h|)\\ \vdots\\ (x^n)'(t)h+o(|h|)\end{matrix}\right|\right)=df_{x(t)}\begin{pmatrix}(x^1)'(t)\\ \vdots\\ (x^n)'(t)\end{pmatrix}h+o(|h|)$$ □

Теорема 7.4 (теорема Лагранжа). *Пусть $E\subset\mathbb{R}^n$, и пусть отрезок $[x,x+h]$ содержится в E, функция $f\colon E\to\mathbb{R}$ непрерывна на $[x,x+h]$ и дифференцируема на $(x,x+h)$. Тогда существует точка $\xi\in(x,x+h)$, такая что $f(x+h)-f(x)=df_\xi h$.*

Proof. Функция $F(t) = f(x+th)$, согласно лемме 7.1, дифференцируема при $t \in [0,1]$ и, следовательно, удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа для функций на отрезке. Поэтому, согласно лемме 7.1, $f(x+h)-f(x) = F(1)-F(0) = F'(\theta) = df_{x+\theta h}h =$ где $\theta \in (0,1)$. □

Определение 7.5. *Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется линейно связным, если любые его точки x_1, x_2 можно соединить путем $l \subset E$, то есть, если существует непрерывное отображение $f\colon [0,1] \to E$, такое что $f(0) = x_1$, $f(1) = x_2$.*

Следствие 7.1. *Если функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ дифференцируема на линейно связном открытом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ и $df = 0$ в каждой точке E, то f — постоянная функция.*

Proof. Пусть $x_1, x_2 \in E$. Докажем, что $f(x_1) = f(x_2)$. Пусть l — путь, соединяющий точки x_1 и x_2. Покроем его шарами $B_x = B(x,\delta_x) \subset E$, где $x \in l$. Выберем из них конечное подмножество $B_{\alpha_1},\dots,B_{\alpha_n}$, покрывающее путь l. Тогда существуют состоящая из отрезков $[t_i,t_{i+1}]$ ломанная $\hat{l} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_{\alpha_i}$, соединяющие x_1 и x_2. Но в этом случае, согласно теореме теорема Лагранжа 7.4, $f(t_i) - f(t_{i+1}) = df_\xi h = 0$, то есть $f(t_i) = f(t_{i+1})$. □

Определение 7.6. *Частной производной порядка k функции $f(x^1,\dots,x^n)$ называется функция*

$$\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\Big(\frac{\partial}{\partial x^{i_2}}\Big(\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}f\Big)\dots\Big) = \frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1}\dots\partial x^{i_k}}.$$

Теорема 7.5. *Пусть частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$ функции $f\begin{pmatrix}x^1\\ \vdots \\ x^n\end{pmatrix}$ существуют на открытом множестве E и непрерывны в точке $x \in E$. Тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$.*

Proof. Достаточно рассмотреть функцию f в шаре $B \subset E \subset \mathbb{R}^2$ с центром $x = \begin{pmatrix}x^1\\ x^2\end{pmatrix}$. Рассмотрим вектор $h = \begin{pmatrix}h^1\\ h^2\end{pmatrix}$, такой что $x+h \in B$. Для $t \in \mathbb{R}$ положим

$$\phi(t) = f\begin{pmatrix}x^1+th^1\\ x^2+h^2\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}x^1+th^1\\ x^2\end{pmatrix}.$$

Положим

$$F\begin{pmatrix}h^1\\ h^2\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}x^1+h^1\\ x^2+h^2\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}x^1+h^1\\ x^2\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}x^1\\ x^2+h^2\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\end{pmatrix} = \phi(1)-\phi(0).$$

Согласно теореме Лагранжа для функций одной переменной (теорема 2.9), существуют $\theta_1,\theta_2 \in (0,1)$, такие что

$$F\begin{pmatrix}h^1\\ h^2\end{pmatrix} = \phi'(\theta_1) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x^1}\begin{pmatrix}x^1+\theta_1 h^1\\ x^2+h^2\end{pmatrix} - \frac{\partial f}{\partial x^1}\begin{pmatrix}x^1+\theta_1 h^1\\ x^2\end{pmatrix}\Big)h^1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1}\begin{pmatrix}x^1+\theta_1 h^1\\ x^2+\theta_2 h^2\end{pmatrix}h^1h^2.$$

Аналогично, существуют $\tilde\theta_1, \tilde\theta_2 \in (0,1)$, такие что

$$F\begin{pmatrix}h^1\\ h^2\end{pmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2}\begin{pmatrix}x^1+\tilde\theta_1 h^1\\ x^2+\tilde\theta_2 h^2\end{pmatrix} h^1 h^2.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1}\begin{pmatrix}x^1+\theta_1 h^1\\ x^2+\theta_2 h^2\end{pmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2}\begin{pmatrix}x^1+\tilde\theta_1 h^1\\ x^2+\tilde\theta_2 h^2\end{pmatrix}.$$

Переходим к пределу при $h \to 0$ и находим, что $\frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2}(x^1,x^2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1}(x^1,x^2)$. □

Без условия непрерывности частных производных теорема 7.5 неверна.

Пример 7.3. *Пусть*

$$f\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{при } \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},\\ 0 & \text{при } \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.\end{cases}$$

Тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} = -1$.

Обозначим через $C^k(E)$ множество всех непрерывных функций, частные производные которых определены и непрерывны до k-го порядка включительно на множестве E.

Задача 7.2. *Докажите, что если $f \in C^k(E)$, то все частные производные до порядка k включительно не зависят от порядка дифференцирования.*

7.3. **Формула Тейлора.**

Лемма 7.2. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^k(E)$, $[x, x+h] \subset E$ для $h = \begin{pmatrix}h^1\\ \vdots\\ h^n\end{pmatrix}$ и $F(t) = f(x+th)$ для $t \in [0,1]$. Тогда*

$$F^{(k)}(0) = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1}\dots\partial x^{i_k}}(x) h^{i_1}\dots h^{i_k}.$$

Proof. Применим индукцию по k. При $k = 1$ нужное нам утверждение $F'(0) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) h^i$ следует из леммы 7.1. Пусть теперь утверждение доказано для $k = m-1$. Тогда, согласно лемме 7.1,

$$F^{(m)}(0) = \frac{d}{dt}F^{(m-1)}(0) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i_1\dots i_{m-1}=1}^{n} \frac{\partial^{m-1} f}{\partial x^{i_1}\dots\partial x^{i_{m-1}}}(x+th) h^{i_1}\dots h^{i_{m-1}}\right)\Bigg|_{t=0} =$$

$$\sum_{i_1\dots i_{m-1}=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x^{i_1}\dots\partial x^{i_{m-1}}\partial x^i}(x) h^{i_1}\dots h^{i_{m-1}} h^i = \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x^{i_1}\dots\partial x^{i_m}}(x) h^{i_1}\dots h^{i_m}$$

□

Теорема 7.6 (формула Тейлора)**.** *Пусть* $E \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^N(E), [x, x+h] \subset E$. *Тогда*

$$f(x+h) - f(x) = f\begin{pmatrix} x^1 + h^1 \\ \vdots \\ x^n + h^n \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} =$$

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_k}}(x) h^{i_1} \dots h^{i_k} + r_N(x,h),$$

где

$$r_N = \sum_{i_1 \dots i_N = 1}^{n} \left(\int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{N-1}}{(N-1)!} \frac{\partial^N f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_N}}(x+th)dt \right) h^{i_1} \dots h^{i_N} =$$

$$\frac{1}{N!} \sum_{i_1,\dots,i_N=1}^{n} \frac{\partial^N f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_N}}(x+\theta h) h^{i_1} \dots h^{i_N} = \frac{1}{N!} \sum_{i_1,\dots,i_N=1}^{n} \frac{\partial^N f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_N}}(x) h^{i_1} \dots h^{i_N} + o(|h|^N)$$

для некоторого $\theta \in (0,1)$.

Proof. Применяя обычную формулу Тейлора к функции $F(t) = f(x+th)$, находим, что

$$f(x+th) - f(x) = F(1) - F(0) = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} + r_N,$$

где

$$r_N = \int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{N-1}}{(N-1)!} F^{(N)}(t)dt = \frac{1}{N!} F^{(N)}(\theta) = \frac{1}{N!} F^{(N)}(0) + o(t^N).$$

Отсюда, используя лемму 7.2, получаем нужный результат. □

В доказанной выше формуле Тейлора многие слагаемые встречаются по несколько раз. Например, в нее входят слагаемые

$$\frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2}(x) h^1 h^2 \quad \text{и} \quad \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1}(x) h^2 h^1,$$

равные друг другу в силу теоремы 7.5. Объединив слагаемые такого типа можно привести формулу Тейлора к более компактному виду, записав ее через *мультииндексы*, то есть наборы неотрицательных целых чисел вида $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Положим по определению

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!, \quad h^\alpha = (h^1)^{\alpha_1} \cdots (h^n)^{\alpha_n},$$

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{(\partial x^1)^{\alpha_1} \dots (\partial x^n)^{\alpha_n}}.$$

Следствие 7.2. *В предположениях теоремы 7.6 справедлива формула*

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha| \le N-1} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + r_N(x,h),$$

где

$$r_N(x,h) = \sum_{|\alpha|=N} \left(\int_0^1 \frac{N(1-t)^{N-1}}{\alpha!} D^\alpha f(x+th)\, dt \right) h^\alpha = \sum_{|\alpha|=N} \frac{D^\alpha f(x+\theta h)}{\alpha!} h^\alpha =$$

$$\sum_{|\alpha|=N} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!}\, h^\alpha + o(|h|^N) \qquad (h \to 0)$$

для некоторого $\theta \in (0,1)$.

Задача 7.3. *Доказать следствие 7.2.*

Последняя запись многомерной формулы Тейлора (следствие 7.2) внешне похожа на одномерные формулы Тейлора (следствие 5.1). В окрестности точки x_0 она дает представление функции с достаточным числом частных производных в виде

$$f(x) = f(x_0) + f_1^{x_0}(x) + f_2^{x_0}(x) + \dots,$$

где $f_k^{x_0}(x) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha$ — однородный полином степени k от переменных $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$. Согласно нашим определениям, $f_1^{x_0} = df_{x_0}$. Добавление каждой новой функции $f_k^{x_0}$ — это более точная аппроксимация функции f.

Лемма 7.3. *Если функция* $f\colon E \to \mathbb{R}$ *имеет в точке* x_0 *максимум или минимум и частная производная* $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$ *существует, то она равна 0. Таким образом в точке максимума или минимума* x_0 *дифференциал* df_{x_0} *равен 0, если он существует.*

Proof. Если функция $\phi(x^i) = f\begin{pmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^{i-1} \\ x^i \\ x_0^{i+1} \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix}$ имеет в точке x_0 экстремум, то, согласно определению частной производной и теореме Ролля 2.8 $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = \phi'(x_0^i) = 0$. □

Определение 7.7. *Квадратичная форма*

$$f_2^{x_0}(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} f(x_0)(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j),$$

называется гессианом функции f *в точке* x_0.

Теорема 7.7. *Пусть* $f\colon E \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(E)$ *и* $df_{x_0} = 0$. *Тогда если гессиан* $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} h^i h^j$ *в точке* x_0 *положительно(отрицательно) определен, то функция* f *имеет в точке* x_0 *минимум (максимум).*

Proof. Мы имеем

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{|h|^2}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} f(x_0) \frac{h^i h^j}{|h|^2} + o(1)\right) = \frac{|h|^2}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} f(x_0) s^i s^j + o(1)\right),$$

где $(s^1, \dots, s^n) \in \partial B(0,1)$.

Если квадратичная форма $A = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) s^i s^j$, например, положительно определена, то она положительна на компакте $\partial B(0,1)$ и, следовательно достигает на нем положительного минимума (следствие 6.1). Таким образом функция $\left(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} f(x_0) s^i s^j + o(1)\right)$, а значит и функция $f(x_0+h) - f(x_0)$ положительна при достаточно маленьком h. $\square$

Задача 7.4. *Возможен ли экстремум, если форма принимает как отрицательные, так и положительные значения?*

8. Дифференцируемые отображения

8.1. **Дифференциал отображения.** Займемся теперь изучением отображений вида $f : E \to \mathbb{R}^m$, где E, как и раньше — открытая область в $\mathbb{R}^n$.

Определение 8.1. *Зависящие от x координаты $f^i(x)$ значения* $f(x) = \begin{pmatrix} f^1(x) \\ \vdots \\ f^n(x) \end{pmatrix}$ *называются координатными функциями. Говорят, что отображение $\alpha\colon E \to \mathbb{R}^m$ есть "о малое" от функции $\beta\colon E \to \mathbb{R}$ (пишут $\alpha = o(\beta)$ при $x \to a$), если существует отображение $\gamma\colon E \to \mathbb{R}^m$ такое, что $\alpha^i(x) = \beta(x)\gamma^i(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} \gamma^i(x) = 0$ при $i = 1, \dots, m$.*

Следующее определение продолжает определение дифференцируемости для функции многих переменных на отображения.

Определение 8.2. *Отображение $f\colon E \to \mathbb{R}^m$ называется дифференцируемым в точке x, если существует линейный оператор $L_x\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, такой что $f(x+h) - f(x) = L_x h + o(|h|)$ при $h \to 0$. Оператор $L(x)$ называется дифференциалом отображения f в точке x и обозначается $L_x = df_x$.*

Таким образом дифференцируемое на $E \subset \mathbb{R}^n$ отображение порождает отображение множества E в пространство линейных операторов $\mathsf{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Задача 8.1. *Докажите, что дифференцируемое отображение непрерывно.*

Лемма 8.1. *Отображение дифференцируемо, если и только если все его координатные функции дифференцируемы.*

Proof. Линейность оператора L означает, что $L(h) = \begin{pmatrix} l^1(h) \\ \vdots \\ l^m(h) \end{pmatrix}$, где $l^j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — линейные функционалы. Таким образом равенство $f(x+h) - f(x) = L_x h + o(|h|)$ эквивалентно равенствам $f^i(x+h) - f^i(x) = l^i_x h + o(|h|)$ для некоторого семейства линейные функционалов $l^1, \dots, l^m$. Согласно нашим определениям, это означает, что координатные функции дифференцируемы и $df^i = l^i$. Обратное утверждение непосредственно следует из наших определений. $\square$

Из этой леммы и теорем 7.2, 7.3 сразу следует

Следствие 8.1. *Пусть все частные производные $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ отображения $f\colon E \to \mathbb{R}^m$ существуют и непрерывны в точке $x \in E$. Тогда отображение f дифференцируемо в точке x. Если отображения $f_1\colon E \to \mathbb{R}^m$, $f_2\colon E \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемы в точке x, то отображение $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ тоже дифференцируемо в точке x и $d(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 df_1 + \lambda_2 df_2$.*

Теорема 8.1. *Пусть отображение $f\colon E \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке x. Тогда частные производные всех координатных функций по всем переменным существуют и*

$$df_x \begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial f^1/\partial x^1 & \dots & \partial f^1/\partial x^n \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial f^m/\partial x^1 & \dots & \partial f^m/\partial x^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^n \end{pmatrix}.$$

Proof. Лемма 8.1 сводит утверждение теоремы 8.1 к утверждению теоремы 7.1 □

Определение 8.3. *Матрица* $\begin{pmatrix} \partial f^1/\partial x^1 & \dots & \partial f^1/\partial x^n \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial f^m/\partial x^1 & \dots & \partial f^m/\partial x^n \end{pmatrix}$ *называется матрицей Якоби или якобианом отображения f.*

Теорема 8.2. *Пусть отображение $f\colon E \to F \subset \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке x, а отображение $g\colon F \to \mathbb{R}^k$ дифференцируемо в точке $y = f(x)$. Тогда композиция $g \circ f$ дифференцируема в точке x и $d_{g\circ f}(x) = dg_y df_x$.*

Proof. Мы имеем

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x) &= g(f(x+h)) - g(f(x)) = \\ &= dg_y(f(x+h) - f(x)) + o(|f(x+h) - f(x)|) = \\ &= dg_y(df_x h + o(|h|)) + o(df(x)h + o(|h|)) = dg_y df_x h + o(|h|).\end{aligned}$$

□

Задача 8.2. *Докажите, что лемма 7.1 является следствием теоремы 8.2*

Лемма 8.2. *Пусть $f\colon E \to F$ — взаимно однозначное отображение, дифференцируемое в точке $x \in E$, причем дифференциал df_x обратим. Тогда существуют $k > 0$ такое, что $k < \frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|}$ при достаточно малом $|h|$.*

Proof. Функция $|df_x(r)|$ имеет на компакте $\partial B(0,1)$ минимум $\tilde{k}$ (следствие 6.1), который положителен в виду невырожденности оператора df_x. Таким образом, $0 < \tilde{k} < \frac{|df_x(h)|}{|h|}$ при всех $h \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, $f(x+h) - f(x) = df_x(h) + o(|h|)$. Таким образом, $\frac{\tilde{k}}{2} < \frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|}$ при достаточно малом $|h|$. □

Теорема 8.3. *Пусть $f\colon E \to F$ — взаимно однозначное отображение, дифференцируемое в точке $x \in E$, причем дифференциал df_x обратим. Тогда, если функция $f^{-1}\colon F \to E$ непрерывна в точке $y = f(x)$, то она дифференцируема в этой точке и $df_y = (df_x)^{-1}$.*

Proof. Положим $t = f(x+h) - f(x)$. Тогда $f(x+h) = t + y$, $x + h = f^{-1}(t+y)$ и $h = f^{-1}(y+t) - f^{-1}(y)$. Из дифференцируемости отображения f следует, что $t = df_x h + o(|h|)$, откуда $(df_x)^{-1}t = h + (df_x)^{-1}o(|h|) = h + o(|h|)$. То есть $f^{-1}(y+t) - f^{-1}(y) = h(t) = (df_x)^{-1}t + o(|h(t)|)$

Для завершения доказательства осталось доказать, что $o(|h(t)|) = o(t)$. Согласно нашим определениям, $o(|h(t)|) = |h(t)|\gamma(h(t))$, где $\lim\limits_{h\to 0}\gamma(h) = 0$. Таким образом $o(|h(t)|) = |t|\delta(t)$, где $\delta(t) = \frac{|h(t)|}{|t|}\gamma(h(t))$ и надо доказать, что $\lim\limits_{t\to 0}\delta(t) = 0$.

Непрерывность функции f^{-1} означает, что $\lim\limits_{t\to 0}h(t) = 0$, откуда $\lim\limits_{t\to 0}\gamma(h(t)) = \lim\limits_{h\to 0}\gamma(h) = 0$. Кроме того, $0 < k < \frac{|t(h)|}{|h|}$ при достаточно маленьком $|h|$, согласно лемме 8.2. В виду $\lim\limits_{t\to 0} h(t) = 0$ отсюда следует, что $\frac{|h(t)|}{|t|} < \frac{1}{k}$ при достаточно маленьком $|t|$. Таким образом, $\lim\limits_{t\to 0}\delta(t) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{|h(t)|}{|t|}\gamma(h(t)) = 0$. $\square$

8.2. **Локальная геометрия кривых.**

Определение 8.4. *Дифференцируемое отображение $f : I \to \mathbb{R}^m$ интервала $I \subset \mathbb{R}$ называется параметризованной дифференцируемой кривой. Образ $f(I) \subset \mathbb{R}^m$ называется дифференцируемой кривой в $\mathbb{R}^m$*

Разные параметризованные кривые могут задавать одинаковые кривые в $\mathbb{R}^m$.

Пример 8.1. *1. Пусть $I_1 = R$, $f_1(\psi) = \begin{pmatrix} a\cosh\psi \\ b\sinh\psi \end{pmatrix}$. Тогда* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \cosh^2\psi - \sinh^2\psi = \left(\frac{e^{\psi}+e^{-\psi}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{\psi}-e^{-\psi}}{2}\right)^2 = 1.$

2. Пусть $I_2 = (0, +\infty)$, $f_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a\left(t + \frac{1}{t}\right) \\ \frac{1}{2}b\left(t - \frac{1}{t}\right) \end{pmatrix}$. Тогда $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{4}\left(\left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - \left(t - \frac{1}{t}\right)^2\right) = 1.$

3. Пусть $I_3 = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f_3(\phi) = \begin{pmatrix} \frac{a}{\cos\phi} \\ b\tan\phi \end{pmatrix}$. Тогда $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{\cos^2\phi} - \frac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi} = 1$.

Таким образом, параметризованные кривые I_1, I_2, I_3 порождают одну и туже кривую $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, x \geq 0\right\}$.

Параметризованная дифференцируемая кривая $f : I \to \mathbb{R}^m$, где $f(t) = \begin{pmatrix} f^1(t) \\ \vdots \\ f^m(t) \end{pmatrix}$ порождает параметризованные производные кривые $f^{(n)}(t) = \begin{pmatrix} (f^1)^{(n)} \\ \vdots \\ (f^m)^{(n)} \end{pmatrix}$.

Из одномерной теоремы Тейлора-Юнга (теорема 5.3) сразу следует

Теорема 8.4 (теорема Тейлора-Юнга для кривых)**.** *Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ — параметризованная кривая, причем кривая $f^{(n)}$ непрерывна и $t_0 \in (a,b)$. Тогда*

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + \frac{h}{1!}f'(t_0) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(t_0) + h^n o(1)$$

при $h \to 0$.

Пример 8.2. *Рассмотрим окружность $f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$. Тогда*

$$f(h) = \begin{pmatrix} \cos 0 \\ \sin 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin 0 \\ \cos 0 \end{pmatrix} h + \begin{pmatrix} -\cos 0 \\ -\sin 0 \end{pmatrix} \frac{h^2}{2} + + h^2 o(1) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} h + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} h^2 + o(1)h^2$$

при $h \to 0$.

Определение 8.5. *Говорят, что параметризованная кривая $f\colon I \to \mathbb{R}^n$ имеет касательную l в точке $t_0 \in I$, если*

1) $\exists \epsilon > 0\ \forall |t-t_0| < \epsilon$: $f(t) \neq f(t_0)$;

2) Прямая l_t, проходящая через точки $f(t)$ и $f(t_0)$, имеет предельное l положение при $t \to t_0$.

Теорема 8.5. *Пусть $f\colon I \to \mathbb{R}^n$ — параметризованная кривая, такая что $f'(t_0) = \dots = f^{(n-1)}(t_0) = 0$ и $f^{(n)}(t_0) \neq 0$. Тогда кривая f имеет касательную в точке t_0 вида $l(s) = f(t_0) + f^{(n)}(t_0)s$.*

Proof. Согласно теореме Тейлора- Юнга,

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n + (t-t_0)^n o(1)$$

Отсюда $\lim\limits_{t\to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{(t-t_0)^n} = \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!} \neq 0$. Следовательно, условие 1) определения касательной выполнено. При каждом t через точки $f(t)$ и $f(t_0)$ проходит прямая $l_t(r) = f(t_0) + \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}r$. Она совпадает с прямой

$$l_t(s) = f(t_0) + \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\Big(\frac{n!}{(t-t_0)^{n-1}}\Big)s = f(t_0) + f^{(n)}(t_0)s + o(1)$$

Следовательно, предел $\lim\limits_{t\to t_0} l_t$ существует и равен прямой $l(s) = f(t_0) + f^{(n)}(t_0)s$. □

Рассмотрим теперь более подробно кривые на плоскости. Опишем сначала поведение дифференцируемой кривой в параметризации $f : I \to \mathbb{R}$ относительно касательной. Пусть $f^{(i)}(t_0) = 0$ для $0 < i < p$, $f^{(p)}(t_0) \neq 0$, $f^{(i)}(t_0) = \lambda_i f^{(p)}(t_0)$ при $p \leq i < q$, и вектор $f^{(q)}(t_0)$ не равен 0 и не параллелен вектору $f^{(p)}(t_0)$. Тогда, согласно теореме Тейлора-Юнга,

$$f(t_0+h) - f(t_0) = \frac{f^{(p)}(t_0)}{p!}h^p + \frac{f^{(p+1)}(t_0)}{(p+1)!}h^{p+1} + \dots + \frac{f^{(q-1)}(t_0)}{(q-1)!}h^{q-1} +$$

$$+\frac{f^{(q)}(t_0)}{q!}h^q + h^q(o(1), o(1)) = \xi(h)f^{(p)}(t_0) + \zeta(h)f^{(q)}(t_0) + h^q o(1),$$

где

$$\xi(h) = \frac{h^p}{p!} + h^p o(1),\ \zeta(h) = \frac{h^q}{q!}.$$

Рассмотрим отдельно разные случаи (рисунки в моей книжке стр. 33):

а) p — нечетное, q — четное; тогда ξ имеет тот же знак, что и h, а $\zeta \geq 0$ (см. рис. 4а));

б) p — нечетное, q — нечетное; тогда ξ и ζ имеют тот же знак, что и h (см. рис. 4б));

в) p — четное, q — нечетное; тогда $\xi \geq 0$ и ζ имеет тот же знак, что и h (см. рис. 4в));

г) p — четное, q — четное; тогда $\xi \geq 0$ и $\zeta \geq 0$ (см. рис. 4г)).

На практике чаще всего встречаются случаи:

1) точка общего положения (все производные отличны от нуля: $p = 1$ и $q = 2$, то есть случай 1);

2) перегиб: $p = 1$, $q = 3$ (то есть случай 2);

3) полукубическая парабола: $p = 2$, $q = 3$ (то есть случай 3), например, $(f^1 = t^2, f^2 = t^3)$ $(f^2 = \sqrt[3]{(f^1)^2})$.

8.3. **Глобальная геометрия кривых на плоскости.** Перейдем, теперь к описанию асимптотического поведения кривой

Определение 8.6. *Пусть* $t_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. *Говорят, что параметризованная кривая* $f\colon I \to \mathbb{R}^2$ *образует бесконечную ветвь при* $t \to t_0$, *если* $\lim\limits_{t\to t_0} |f(t)| = \infty$. *Предел* $\lim\limits_{t\to t_0} \frac{f(t)}{|f(t)|}$, *если существует, называется вектором асимптотического направления. Параллельные ему прямые называются прямыми, представляющими асимптотическое направление этой ветви.*

Определение 8.7. *Пусть* l_t *— прямая, проходящая через точку* $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ *и представляющая асимптотическое направление для бесконечной ветви* $t \to t_0$. *Если прямая* l_t *стремится к* ∞ *при* $t \to t_0$, *то говорят, что ветвь* параболическая, *если* $\lim\limits_{t\to t_0} l_t = l$, *то говорят, что* l *— асимптота ветви.*

Пример 8.3. *1. Пусть* $f(t) = \begin{pmatrix} \tan t \\ \tan^2 t \end{pmatrix}$, $t_0 = \pi/2$. *Тогда*

$$\lim_{t\to\pi/2} |f(t)| = \lim_{t\to\pi/2} \sqrt{\tan^2 t + \tan^4 t} = \infty,$$

$$\lim_{t\to\pi/2} \frac{f(t)}{|f(t)|} = \lim_{t\to\pi/2} \begin{pmatrix} \frac{\tan t}{\sqrt{\tan^2 t + \tan^4 t}} \\ \frac{\tan^2 t}{\sqrt{\tan^2 t + \tan^4 t}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *— вектор асимптотического направления при* $t \to \pi/2$, $l_t = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = \tan t \right\}$ *и* $\lim\limits_{t\to\pi/2} l_t = \infty$. *Следовательно, кривая* f *имеет при* $t \to t_0$ *бесконечную параболическую ветвь.*

2. Пусть $f(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos t} \\ \tan t \end{pmatrix}$, $t_0 = \pi/2$. *Тогда*

$$\lim_{t\to\pi/2} |f(t)| = \lim_{t\to\pi/2} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} + \tan^2 t} = \infty,$$

$$\lim_{t\to\pi/2} \frac{f(t)}{|f(t)|} = \lim_{t\to\pi/2} \begin{pmatrix} \frac{1/\cos t}{\sqrt{1/\cos^2 t + \tan^2 t}} \\ \frac{\tan t}{\sqrt{1/\cos^2 t + \tan^2 t}} \end{pmatrix}$$

$$= \lim_{t\to\pi/2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t}} \\ \frac{\sin t}{\sqrt{1+\sin^2 t}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

— вектор асимптотического направления;

$$l_t = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos t} + r \\ \tan t + r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid r \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y - x = \tan t - \frac{1}{\cos t} = \frac{\sin t - 1}{\cos t} \right\},$$

$\lim\limits_{t\to\pi/2} l_t = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y - x = \lim\limits_{t\to\pi/2} \frac{\sin t - 1}{\cos t} = 0\right\}$. *Следовательно,* $l = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\right\}$ *— асимптота бесконечной ветви кривой $f(x)$ при $t \to t_0$.*

Следующие теоремы обобщает эти примеры.

Теорема 8.6. *Пусть кривая* $f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ *имеет бесконечную ветвь при $t \to t_0$ и* $\lim\limits_{t\to t_0} \frac{x(t)}{y(t)} = 0$. *Тогда прямая* $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\right\}$ *представляет асимптотическое направление. В этом случае*

а) *если* $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \infty$, *то это параболическая ветвь*;

б) *если* $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = x_0 \in \mathbb{R}$, *то прямая* $\tilde{l} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = x_0\right\}$ *является асимптотой.*

Proof. Справедливы равенства

$$\lim_{t\to t_0} \frac{f(t)}{|f(t)|} = \lim_{t\to t_0} \begin{pmatrix} \frac{x(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}} \\ \frac{y(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}} \end{pmatrix} = \lim_{t\to t_0} \begin{pmatrix} \frac{x(t)/y(t)}{\sqrt{((x(t)/y(t))^2+1}} \\ \frac{1}{\sqrt{(x(t)/y(t))^2+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то есть l — асимптотическое направление и $l_t = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = x(t)\right\}$. Отсюда сразу следует заключительное утверждение теоремы. □

Задача 8.3. *Сформулируйте и докажите аналогичную теорему для случая* $\lim\limits_{t\to t_0} \frac{x(t)}{y(t)} = \infty$.

Теорема 8.7. *Пусть кривая* $f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ *имеет бесконечную ветвь при $t \to t_0$. Тогда если* $\lim\limits_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *то прямая* $l = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx\right\}$ *представляет асимптотическое направление. В этом случае*

а) *если* $\lim\limits_{t\to t_0} (y(t) - mx(t)) = \infty$, *то это параболическая ветвь;*

б) *если* $\lim\limits_{t\to t_0} (y(t) - mx(t)) = p \in \mathbb{R}$, *то прямая* $\tilde{l} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx + p\right\}$ *является асимптотой.*

Proof. Справедливы равенства

$$\lim_{t\to t_0} \frac{f(t)}{|f(t)|} = \lim_{t\to t_0} \frac{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}} = \lim_{t\to t_0} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+(y(t)/x(t))^2}} \\ \\ \frac{y(t)/x(t)}{\sqrt{1+(y(t)/x(t))^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \\ \\ \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\begin{pmatrix} 1 \\ \\ m \end{pmatrix}$ — вектор асимптотического направления и $l_t = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) + r \\ y(t) + mr \end{pmatrix} | r \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx + (y(t) - mx(t))\right\}$. Отсюда следует заключительное утверждение теоремы. □

Опишем алгоритм построения кривой $f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

1. Найти область определения A кривой f и ее компоненты связности.

2. Найти точки t_0, в которых $x'(t_0) = 0$ или $y'(t_0) = 0$, и точки, в которых $f''(x_0) = \lambda f'(x_0)$.

3. Исследовать форму кривой в окрестностях этих точек.

4. Найти бесконечные ветви и их асимптотические направления. Выделить параболические ветви и найти асимптоты.

5. Построить кривую.

Пример 8.4. *Построим кривую* $f(t) = \begin{pmatrix} t + \frac{1}{t} \\ t + \frac{1}{2t^2} \end{pmatrix}$.

1. Область определения имеет вид $A = \mathbb{R} \setminus 0 = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-$, *где* $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R}; t > 0\}$, $\mathbb{R}_- = \{t \in \mathbb{R}; t < 0\}$.

2. Имеем $x' = 1 - \frac{1}{t^2}$, $y' = 1 - \frac{1}{t^3}$. *Если* $x'(t_0) = 0$, *то* $t_0 = \pm 1$. *Если* $y'(t_0) = 0$, *то* $t_0 = 1$. *Кроме того,* $f'(t) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{t^2} \\ 1 - \frac{1}{t^3} \end{pmatrix}$, $f''(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{t^3} \\ \frac{3}{t^4} \end{pmatrix}$, $f'''(t) = \begin{pmatrix} -\frac{6}{t^4} \\ -\frac{12}{t^5} \end{pmatrix}$. *Если* $f''(t_0) = \lambda f'(t_0)$, *то* $\begin{pmatrix} \frac{2}{t_0^3} \\ \frac{3}{t_0^4} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{t_0^2} \\ 1 - \frac{1}{t_0^3} \end{pmatrix}$ *и, следовательно,* $t_0 = 1$ *или* $t_0 = -\frac{1}{2}$.

3. a. Если $t_0 = 1$, *то* $f(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, $f'(1) = 0$, $f''(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $f'''(1) = -\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$. *Мы имеем*

$$f(1+h) = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{h^2}{2} - \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} \frac{h^3}{6} + o(1)h^3.$$

Это — точка типа 3.

b. Если $t_0 = -1$, *то* $f(-1) = -\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $f'(-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f''(-1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. *Мы имеем*

$$f(-1+h) = -\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} h + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{h^2}{2} + o(1)h^2.$$

Это — точка типа 1.

c. Если $t_0 = -\frac{1}{2}$, *то* $f\Big(-\frac{1}{2}\Big) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, $f'\Big(-\frac{1}{2}\Big) = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix}$, $f''\Big(-\frac{1}{2}\Big) = \begin{pmatrix} -16 \\ 3,16 \end{pmatrix}$, $f'''\Big(-\frac{1}{2}\Big) = \begin{pmatrix} -6,16 \\ 12,32 \end{pmatrix}$. *Мы имеем*

$$f\Big(-\frac{1}{2} + h\Big) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} h + 16 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{h^2}{2} + + \begin{pmatrix} -16 \\ 64 \end{pmatrix} h^3 + o(1)h^3.$$

Это — точка типа 2.

4. Заметим, что $\lim\limits_{t \to t_0} |f(t)|^2 = \lim\limits_{t \to t_0} \Big(t^2 + 2 + \frac{1}{t^2} + t^2 + \frac{1}{t} + \frac{1}{4t^2}\Big)$. *Этот предел равен* ∞, *если и только если* $t_0 = 0$ *или* $t_0 = \infty$.

a. Если $t_0 = 0$, *то* $\lim\limits_{t \to 0} \frac{x(t)}{y(t)} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{t + 1/t}{t + 1/2t^2} = 0$ *и* $\lim\limits_{t \to 0} x(t) = \lim\limits_{t \to 0} \Big(t + \frac{1}{t}\Big) = \infty$. *Согласно теореме 14.1, это параболическая ветвь с асимптотическим направлением* $l_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \right\}$.

b. Если $t_0 = \pm\infty$, *то* $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t\to\infty}\frac{t+1/2t^2}{t+1/t} = 1$ *и* $\lim\limits_{t\to\infty}(y(t)-x(t)) = \lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{1}{2t^2}-\frac{1}{t}\right) = 0.$ *Согласно теореме 8.7, эта ветвь имеет асимптоту* $l_2 = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \mid x = y\right\}.$

5. Теперь можно нарисовать картинку (см. мою книжку стр. 37).

9. Подмногообразия

9.1. **Теорема о неявной функции.** Геометрические объекты можно задавать не только как образы дифференцируемых отображений. Многие из них — это корни системы уравнений

$$\begin{cases} F^1(x) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ F^k(x) = 0 \end{cases} \qquad x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

Теорема о неявной функции показывает, что множество решений этой системы локально можно трактовать как график некоторого отображения. При $m = 1$ это утверждение переходит в теорему неявной функции.

Пример 9.1. *Единичная окружность* $x^2 + y^2 - 1 = 0$
при $y > 0$ *является графиком функции* $y = \sqrt{1-x^2}$;
при $y < 0$ *является графиком функции* $y = -\sqrt{1-x^2}$;
при $x > 0$ *является графиком функции* $x = \sqrt{1-y^2}$;
при $x < 0$ *является графиком функции* $x = -\sqrt{1-y^2}$.

Теорема 9.1 (теорема о неявной функции)**.** *Пусть* $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $F \in C^p(U)$, $p > 0$ *и* $F\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} = 0$, *где* $x_0 = \begin{pmatrix}x_0^1\\ \vdots \\ x_0^n\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}$. *Предположим, что* $\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} \neq 0$.

Тогда существуют окрестность $V \subset \mathbb{R}^n$ *точки* x_0, *число* $\beta > 0$, *где* $\tilde{U} = V \times (y_0 - \beta, y_0 + \beta) \subset U$, *и функция* $f \in C^p(V)$, *такие что*

$$\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \tilde{U} \mid F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 0\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mid x \in V, y = f(x)\right\}$$

. При этом

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x^i}\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix}}{\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix}}.$$

Proof. Пусть $\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} > 0$. Выберем $\beta > 0$ таким образом, чтобы на шаре $B(\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}, \beta)$ выполнялось неравенство $\frac{\partial F}{\partial y} > 0$. Тогда функция $F\begin{pmatrix}x_0\\y\end{pmatrix}$ монотонно возрастает при $|y - y_0| < \beta$ и

$$F\begin{pmatrix}x_0\\y_0-\beta\end{pmatrix} < F\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} = 0 < F\begin{pmatrix}x_0\\y_0+\beta\end{pmatrix}.$$

Ввиду непрерывности функции F существует число $\alpha > 0$, такое что $\beta > \alpha > 0$ и

$$F\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ y_0 - \beta \end{pmatrix} < 0 < F\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ y_0 + \beta \end{pmatrix}.$$

при $|\tilde{x} - x_0| < \alpha$. При каждом таком $\tilde{x} \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ функция $F\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ y \end{pmatrix}$ непрерывна и монотонно возрастает по y и, следовательно, существует единственное число $y_0 - \beta < \tilde{y} < y_0 + \beta$, такое что $F\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = 0$ (см. рис. на стр. 67 моей книжки).

Определим функцию f равенством $\tilde{y} = f(\tilde{x})$. Тогда

$$\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Bigg| |x - x_0| < \alpha, |y - y_0| < \beta, F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Bigg| |x - x_0| < \alpha, y = f(x)\right\}$$

причем $|f(x) - y_0| < \beta$ для $|x - x_0| < \alpha$.

Докажем, что функция f непрерывна. Пусть $0 < \varepsilon < \beta$. Повторим первую часть доказательства и найдем число $0 < \delta < \alpha$, такое что

$$\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Bigg| |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \varepsilon, F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Bigg| |x - x_0| < \delta, y = f(x)\right\},$$

и $|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - y_0| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta$. Это доказывает непрерывность функции f в точке x_0. В остальных точках шара $B\left(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \beta\right)$ условия теоремы тоже выполнены, и, значит, в них функция f также непрерывна.

Докажем, что $f \in C^1(V)$. Согласно теореме Лагранжа 7.4,

$$0 = F\begin{pmatrix} x + \Delta x \\ f(x + \Delta x) \end{pmatrix} - F\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x + \Delta x \\ y + \Delta y \end{pmatrix} - F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = dF_{\begin{pmatrix} x + \theta\Delta x \\ y + \theta\Delta y \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial x^1}\begin{pmatrix} x + \theta\Delta x \\ y + \theta\Delta y \end{pmatrix}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x^n}\begin{pmatrix} x + \theta\Delta x \\ y + \theta\Delta y \end{pmatrix}, \frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} x + \theta\Delta x \\ y + \theta\Delta y \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

Для приращения Δx, где $\Delta x^j = 0$ при $j \neq i$ это равенство дает $0 = \frac{\partial F}{\partial x^i}\begin{pmatrix} x + \theta\Delta x^i \\ y + \theta\Delta y \end{pmatrix}\Delta x^i + \frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} x + \theta\Delta x^i \\ y + \theta\Delta y \end{pmatrix}\Delta y$, то есть

$$\frac{\Delta y}{\Delta x^i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x^i}\begin{pmatrix} x + \theta\Delta x^i \\ y + \theta\Delta y \end{pmatrix}}{\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} x + \theta\Delta x^i \\ y + \theta\Delta y \end{pmatrix}}$$

.

Переходя к пределу $\Delta x^i \to 0$ и, учитывая $y = f(x)$, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x^i}\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}}{\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}}$$

Частная производная $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$ непрерывна ввиду непрерывности функций $\frac{\partial F}{\partial x^i}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$. Если $F \in C^p$, то последнюю формулу можно дифференцировать $p - 1$ раз по всем переменным. Например,

$$\frac{d^2f}{d(x^i)^2} = \frac{-1}{(\partial F/\partial y)^2}\Big(\Big(\frac{\partial F}{\partial x^i} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x^i}\Big)\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\Big(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x^i}\Big)\Big).$$

$\square$

9.2. Теорема о неявном отображении.

Определение 9.1. *Рассмотрим дифференцируемое отображение $F : U \to \mathbb{R}^m$, где $U \subset \mathbb{R}^r$. Множество его нулей $S = \{z \in U | F(z) = 0\}$ называется называется дифференцируемым $n = r - m$-мерным подмногообразием в пространстве $\mathbb{R}^r$.*

Другими словами дифференцируемое $n = r - m$-мерным подмногообразие — это множество решений системы уравнений

$$\begin{cases} F^1(z) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ F^m(z) = 0, \end{cases}$$

где $z \in \mathbb{R}^r$ и $F = \begin{pmatrix} F^1 \\ \dots \\ F^m \end{pmatrix}$.

Разобьем вектор $x = \begin{pmatrix} z^1 \\ \dots \\ z^{r=n+m} \end{pmatrix}$ на две части, положив $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^1 \\ \dots \\ z^n \end{pmatrix}$ и $y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \dots \\ y^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^{n+1} \\ \dots \\ z^r \end{pmatrix}$. Тогда подмногообразия S представится в виде множества решений уравнения $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$. Опишем условия, при которых часть подмногообразия S можно представить в виде графика некоторого отображения $f\colon E \to \mathbb{R}^m$, где $E \subset \mathbb{R}^n$. То есть в виде множества решений уравнения $y = f(x)$

Положим

$$F'_x\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F^m}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial F^m}{\partial x^n} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad F'_y\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial y^m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F^m}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial F^m}{\partial y^m} \end{pmatrix}.$$

Теорема 9.2 (о неявном отображении)**.** *Пусть отображение $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ определено в окрестности точки $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, где $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$, причем $F \in C^p(U)$, $p > 0$, $F\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0$ и $F'_y\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ — обратимая матрица.*

Тогда существуют такие шары

$$I_x = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \Big| |x - x_0| < \alpha\Big\}, \quad I_y = \Big\{y \in \mathbb{R}^m \Big| |y - y_0| < \beta\Big\},$$

где $I_x \times I_y \subset U$, и отображение $f \in C^p$, $f\colon I_x \to I_y$, такие что

$$\Big\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in I_x \times I_y \Big| F(x, y) = 0\Big\} = \Big\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in I_x \times I_y \Big| y = f(x)\Big\}.$$

При этом $df = -\left(F'_y\begin{pmatrix} x \\ f(x)\end{pmatrix}\right)^{-1} F'_x\begin{pmatrix} x \\ f(x)\end{pmatrix}$.

Proof. Воспользуемся индукцией по m. При $m = 1$ утверждение совпадает с утверждением теоремы 9.1. Пусть теорема справедлива для размерности $m-1$. Докажем ее для размерности m. Положим $\check{y} = \begin{pmatrix} y^1 \\ \dots \\ y^{m-1}\end{pmatrix}$

Матрица F'_y невырождена, и после перенумерации переменных y^i и функций F^i, можно считать, что $\frac{\partial F^m}{\partial y^m} \neq 0$. Используя теорему 9.1, находим область $\tilde{U} = \tilde{U}^{n+m-1} \times \tilde{U}^1 \subset U$ и функцию , $\tilde{f}\colon \tilde{U}^{n+m-1} \to \tilde{U}^1$, такую что $\tilde{f} \in C^p(\tilde{U}^{n+m-1})$ и

$$\left\{\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} \in \tilde{U} \mid F^m\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} = 0\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} \in \tilde{U} \mid y^m = \tilde{f}\begin{pmatrix} x \\ \check{y}\end{pmatrix}\right\}.$$

Положим

$$\Phi^k\begin{pmatrix} x \\ \check{y}\end{pmatrix} = F^k\begin{pmatrix} x \\ \check{y} \\ \tilde{f}\begin{pmatrix} x \\ \check{y}\end{pmatrix}\end{pmatrix} \in C^p(\tilde{U}^{n+m-1}).$$

Тогда согласно лемме 7.1, $\frac{\partial \Phi^k}{\partial y^i} = \left(\frac{\partial F^k}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial F^k}{\partial z^r}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial y^i} \\ \frac{\partial \check{y}}{\partial y^i} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^i}\end{pmatrix} = \frac{\partial F^k}{\partial y^i} + \frac{\partial F^k}{\partial y^m}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^i}$ при $i \leq m-1$.

По построению, $\Phi^m\begin{pmatrix} x \\ \check{y}\end{pmatrix} = F^k\begin{pmatrix} x \\ \check{y} \\ \tilde{f}\begin{pmatrix} x \\ \check{y}\end{pmatrix}\end{pmatrix} \equiv 0$, откуда $\frac{\partial F^m}{\partial y^i} + \frac{\partial F^m}{\partial y^m}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^i} = 0$. Таким образом,

$$\det F'_y\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial y^m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F^m}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial F^m}{\partial y^m}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y^1} + \frac{\partial F^1}{\partial y^m}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial y^{m-1}} + \frac{\partial F^1}{\partial y^m}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^{m-1}} & \frac{\partial F^1}{\partial y^m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F^m}{\partial y^1} + \frac{\partial F^m}{\partial y^m}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial F^m}{\partial y^{m-1}} + \frac{\partial F^m}{\partial y^m}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^{m-1}} & \frac{\partial F^m}{\partial y^m}\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi^1}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial \Phi^1}{\partial y^{m-1}} & \partial F^1 \partial y^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi^{m-1}}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial \Phi^{m-1}}{\partial y^{m-1}} & \frac{\partial F^{m-1}}{\partial y^m} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial F^m}{\partial y^m}\end{vmatrix}.$$

Следовательно, матрица

$$\Phi'_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi^1}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial \Phi^1}{\partial y^{m-1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi^{m-1}}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial \Phi^{m-1}}{\partial y^{m-1}}\end{pmatrix}$$

обратима в точке $\begin{pmatrix} x_0 \\ \check{y}_0\end{pmatrix}$.

По предположению индукции, находим область $\check{U} = \check{U}^n \times \check{U}^{m-1} \subset \check{U}^{n+m-1}$ и функцию $\check{f} = \begin{pmatrix} f^1(x) \\ \vdots \\ f^{m-1}(x) \end{pmatrix} \in C^p(\check{U}^n)$, $\check{f}\colon \check{U}^n \to \check{U}^{m-1}$, такую что

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ \check{y} \end{pmatrix} \in \check{U} \middle| \Phi \begin{pmatrix} x \\ \check{y} \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \check{y} \end{pmatrix} \in \check{U} \middle| y^i = f^i(x), i = 1, \dots, m-1 \right\}.$$

Продолжим функцию $\check{f}$ до функции $f = \begin{pmatrix} f^1(x) \\ \vdots \\ f^m(x) \end{pmatrix} \in C^p(\check{U}^n)$ положив и $f^m(x) = \tilde{f} \begin{pmatrix} x \\ \check{f}(x) \end{pmatrix}$.

Итак, мы построили отображение $f\colon I_x \to I_y$, такое что $f \in C^p(I_x)$, $I_x \subset \mathbb{R}^n$, $I_y \subset \mathbb{R}^m$ и

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in I_x \times I_y \mid F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in I_x \times I_y \mid y = f(x) \right\}.$$

В частности, $F^k \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} = 0$ для всех $k = 1, \dots, m$ и $i = 1, \dots, n$. Дифференцируя это равенство по x^i находим, что

$$0 = \Big(\frac{\partial F^k}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial F^k}{\partial z^r} \Big) \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x^i} \\ \frac{\partial f}{\partial x^i} \end{pmatrix} = \frac{\partial F^k}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial F^k}{\partial y^j} \frac{\partial f^j}{\partial x^i}$$

то есть $F'_x = -F'_y df$ и $df = -[F'_y]^{-1} F'_x$. □

Определение 9.2. *Пусть $U, V \subset \mathbb{R}^n$. Биекция $f\colon U \to V$ называется C^p-диффеоморфизмом, если $f \in C^p(U)$ и $f^{-1} \in C^p(V)$.*

Следствие 9.1 (теорема об обратном отображении)**.** *Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$ и отображение $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ таковы, что $f \in C^p(G)$, где $p > 0$, и дифференциал df_{x_0} обратим. Тогда существуют окрестности $x_0 \in U \subset G$ и $f(x_0) \in V \subset \mathbb{R}^n$, такие что отображение $h = f|_U\colon U \to V$ является C^p-диффеоморфизмом. При этом $d(f^{-1}) = (df)^{-1}$.*

Proof. Рассмотрим функцию $F\colon G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, где $F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(x) - y$. Тогда $F \in C^p(G \times \mathbb{R}^n)$, $F'_x = df$ и $F'_y = -1$. По теореме о неявном отображении, существуют такие окрестности $I_x \ni x_0$, $I_y \ni y_0 = f(x_0)$ и такая функция $g\colon I_y \to I_x$, $g \in C^p(I_y)$, что

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in I_x \times I_y \middle| y = f(x) \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \in I_y \times I_x \middle| dF \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \in I_y \times I_x \middle| x = g(y) \right\}$$

и при этом $dg = (df)^{-1}$. □

9.3. **Касательное пространство.** Далее нам понадобится следующий факт из линейной алгебры.

Задача 9.1. *Пусть линейные формы* $l^j : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R} (j = 1, \dots, d)$ *порождают векторное пространство размерности* m. *Тогда* $\dim(\bigcap\limits_{j=1}^{d} \mathsf{Ker}(l^j)) = r - m$.

Определение 9.3. *Дифференцируемое подмногообразие* $S = \{z \in U | F(z) = 0\}$, *где* $F : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^r$ *и* $m < r$ *называется неособым, если ранг матрицы* $\{\frac{\partial F^j}{\partial z^i}\}$ *равен* m *во всех точках подмногообразия.*

Задача 9.2. *Докажите, подмногообразие* S *неособо если только если* $\dim \bigcap\limits_{j=1}^{m} \mathsf{Ker}(dF^j_z) = r - m$ *при* $z \in U$

Определение 9.4. *Вектор* $v \in \mathbb{R}^r$ *называется касательным вектором к подмногообразию* S *в точке* z_0, *если существует праpаметризованная кривая* $\gamma : I \to \mathbb{R}^r$ *такая, что* $z_0 = \gamma(t_0)$, $F(\gamma(t)) = 0$ *и* $v = \gamma'(t_0)$. *Множество всех касательных векторов в точке* z_0 *называется касательным пространством и обозначается* $T_{z_0}S$.

Теорема 9.3. *Касательное пространство* $T_{z_0}S$ *неособого дифференцируемого подмногообразия* $S = \{z \in U \subset \mathbb{R}^r | F(z) = 0\}$, *порожденного функцией* $F : U \to \mathbb{R}^m$, *равно* $\bigcap\limits_{j=1}^{m} \mathsf{Ker}(dF^j_{z_0})$.

Proof. Рассмотрим произвольную параметризованную кривую $\gamma : I \to \mathbb{R}^r$ на S , преходящую через точку $z_0 = \gamma(t_0)$. Дифференцируя по t равенство $F^j(\gamma(t)) = 0$ находим, что $dF^j_{z_0}\gamma'(t_0) = 0$, то есть $\gamma'(t_0) \in \mathsf{Ker}(dF^j_{z_0})$. Следовательно $\gamma'(t_0) \in \bigcap\limits_{j=1}^{m} \mathsf{Ker}(dF^j_{z_0})$ и $T_{z_0}S \subset \bigcap\limits_{j=1}^{m} \mathsf{Ker}(dF^j_{z_0})$. Кроме того $\dim \bigcap\limits_{j=1}^{m} \mathsf{Ker}(dF^j_{z_0}) = r - m$ согласно задаче 9.2.

Таким образом, для завершения доказательства теоремы нам осталось доказать, что касательное пространство $T_{z_0}S$ является векторным пространством размерности $n = r - m$.

В виду неособости подмногообразия S матрица $\{\frac{\partial F^j}{\partial z^i}(z_0)\}$ имеет m линейно независимых строк и столбцов. Перенумеруем переменные z_i таким образом, чтобы матрица $\{\frac{\partial F^j}{\partial z^{n+i}}(z_0)\}(i, j = 1, \dots, m)$ была невырожденной. Тогда, согласно теореме о неявном отображении 9.2, существуют, зависящие от $x = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \subset \mathbb{R}^n$ функция $f : I_x \to \mathbb{R}^m$ такая, что $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \subset U \middle| x \in I_x \subset \mathbb{R}^n \right\}$ совпадает с S в окрестности точки z_0.

Таким образом любая проходящая через точку $z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$ и лежащая на S параметризованная кривая $\gamma : I \to \mathbb{R}^r$ в окрестности точки z_0 имеет вид $\begin{pmatrix} x(t) \\ f(x(t)) \end{pmatrix}$, где $t \in I$ и $x(t_0) = x_0$. Следовательно касательное пространство $T_{z_0}S$ состоит из векторов $\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ (f(x(t)))'(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ df_{x_0}x'(t_0) \end{pmatrix}$, где $x : I \to \mathbb{R}^n$ — некоторая параметризованная кривая.

Докажем, что так может быть представлен любой вектор вида $\begin{pmatrix} v_x \\ df_{x_0}v_x \end{pmatrix}$, где $v_x \in \mathbb{R}^n$. Действительно, кривая $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_0 + (t-t_0)v_x \\ f(x_0 + (t-t_0)v_x) \end{pmatrix}$ сопоставляет произвольному вектору $v_x \in \mathbb{R}^n$ параметризованную кривую $\gamma : I \to \mathbb{R}^r$ такую что $\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ df_{x_0}x'(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ df_{x_0}v_x \end{pmatrix}$. Таким образом множество $T_{z_0}S$ совпадает с множеством $\left\{\begin{pmatrix} v_x \\ df_{x_0}v_x \end{pmatrix} \subset \mathbb{R}^r \middle| v_x \in \mathbb{R}^n\right\}$ и образует векторное пространство изоморфное $\mathbb{R}^n$. $\square$

Следствие 9.2. *Касательное пространство $T_{z_0}S$ неособого дифференцируемого подмногообразия $S = \{z \in U \subset \mathbb{R}^r | F(z) = 0\}$, порожденного функцией $F : U \to \mathbb{R}^m$ совпадает с ядром $\mathsf{Ker}\, dF_{z_0}$, то есть состоит из векторов $v \in \mathbb{R}^r$, координаты которых удовлетворяют системе линейных уравнений $\sum\limits_{i=1}^{r} \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(z_0)v^i = 0,\ j = 1, \ldots, m$*

Proof. В виду теоремы 9.3 нам достаточно доказать, что множеством решений системы $\sum\limits_{i=1}^{r} \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(z_0)v^i = 0,\ j = 1, \ldots, m$ описывает $\bigcap\limits_{j=1}^{m} \mathsf{Ker}(dF^j_{z_0})$. Это действительно так, поскольку каждое из уравнений $\sum\limits_{i=1}^{r} \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(z_0)v^i = 0$ описывает $\mathsf{Ker}(dF^j_{z_0})$. $\square$

9.4. **Множители Лагранжа и условный экстремум.** Предположим, что наряду с неособом подмногообразием $S = \{z \in U | F(z) = 0\}$, $F : U \to \mathbb{R}^m$, $F \in C^2(U)$ на области U задана еще и дифференцируемая функция $f : U \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(U)$. Экстремум ограничения функции $f|_S$ называется *условным экстремумом.* К проблеме его вычисления приводят многие теоретические и прикладные задачи.

Теорема 9.4. *Пусть $z_0 \in S$ — точка условного экстремума функции $f\colon U \to \mathbb{R}$ на S и $df(z_0) \neq 0$. Тогда $\bigcap\limits_{j=1}^{m} \mathsf{Ker}(dF^j_{z_0}) \subset \mathsf{Ker}(df_{z_0})$ и существуют числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ такие что $df_{z_0} = \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j dF^j_{z_0}$.*

Proof. Рассмотрим произвольный вектор $v \in \bigcap\limits_{j=1}^{m} \mathsf{Ker}(dF^j_{z_0})$. Согласно теореме 9.3, $v = \gamma'(t_0)$, где $\gamma : I \to \mathbb{R}^r$ принадлежащая подмногообразию S параметризованная кривая и $z_0 = \gamma(t_0)$. Условие экстремальности дает $d(f(\gamma))_{t_0} = 0$, откуда $df_{z_0}(\gamma))'(t_0) = 0$ и значит $v = (\gamma)'(t_0) \in \mathsf{Ker}\, df_{z_0}$. Таким образом $\bigcap\limits_{j=1}^{m} \mathsf{Ker}(dF^j_{z_0}) \subset \mathsf{Ker}(df_{z_0})$ и, следовательно $\dim((\bigcap\limits_{j=1}^{m} \mathsf{Ker}(dF^j_{z_0})) \bigcap \mathsf{Ker}(df_{z_0})) = \dim(\bigcap\limits_{j=1}^{m} \mathsf{Ker}(dF^j_{z_0}))$. Согласно задаче 9.1, отсюда следует, что df_{z_0} — линейная комбинация форм $dF^j_{z_0}$. $\square$

Определение 9.5. *Числа $\{\lambda_j\}$ называются множителями Лагранжа,для условного экстремума z_0 функции f на $S = \{z \in U | F(z) = 0\}$*

Определение 9.6. *Функция*

$$L(z,\lambda) = f(z) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F^i(z).$$

называется функцией Лагранжа для функции f на $S = \{z \in U | F(z) = 0\}$.

Задача 9.3. *Докажите, что $dL_{(z_0,\lambda_0)} = 0$, если z_0 — условный экстремум функции f на $S = \{z \in U | F(z) = 0\}$ и λ_0 — отвечающие ей множители Лагранжа.*

Теорема 9.5. *Пусть $L(z,\lambda)$ — функция Лагранжа для функции f на $S = \{z \in U | F(z) = 0\}$, $dL_{(z_0,\lambda_0)} = 0$ и квадратичная форма $\sum \frac{\partial^2 L}{\partial z^i \partial z^j}(z_0)\xi^i\xi^j$ знакоопределена на $T_{z_0}S$. Тогда z_0 — точка условного экстремума функции f на S. Это точка локального минимума, если форма положительно определена, и точка локального максимума, если форма отрицательно определена.*

Proof. Согласно формуле Тейлора

$$L(z,\lambda_0) - L(z_0,\lambda_0) = \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2 L}{\partial z^i \partial z^j}(z_0)(z^i - z_0^i)(z^j - z_0^j) + o(|z - z_0|^2)$$

при $z \to z_0$. Ограничение этого равенства на проходящую через $z_0 = \gamma(t_0)$ кривую $\gamma : I \to S$ дает

$$L(\gamma(t),\lambda_0) - L(z_0,\lambda_0) = \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2 L}{\partial z^i \partial z^j}(z_0)(\gamma^i)'(t_0)t(\gamma^j)'(t_0)t + o(t^2)$$

при $t \to t_0$. Эта функция равна 0 при $t = t_0$ и знакопостоянна при достаточно маленьком t в виду знакоопределенности формы $\sum \frac{\partial^2 L}{\partial z^i \partial z^j}(z_0)\xi^i\xi^j$ на TS_{z_0}. □

На практике, чтобы найти условный экстремум, необходимы следующие шаги:

1) написать функцию $L(z,\lambda)$, считая z и λ неизвестными;
2) найти z_0 и λ_0 из условия $dL = 0$
3) найти квадратичную форму $\frac{\partial^2 L}{\partial z^i \partial z^j}(z_0)$;
4) ограничить ее на плоскость TS_{z_0};
5) найти ее сигнатуру.

Пример 9.2. *Найдем экстремум функции $f(z) = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 - y^2$ на прямой $l(z) = l\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x - y - 3 = 0$.*

Функция Лагранжа имеет вид $L(z,\lambda) = x^2 - y^2 - \lambda(2x - y - 3)$. Множитель Лагранжа и критические точки найдем из уравнений

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2\lambda, \quad 0 = \frac{\partial L}{\partial y} = -2y + \lambda, \quad 0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -2x + y + 3.$$

Мы получим

$$\lambda = 2, \quad x_0 = 2, \quad y_0 = 1, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0.$$

Форма $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}$ *на векторах* (ξ_x, ξ_y) *равна* $2(\xi_x^2 - \xi_y^2)$. *Если* (ξ_x, ξ_y) *— касательный вектор к прямой* $l(z) = 0$, *то* $2\xi_x - \xi_y = 0$ *и* $\xi_y = 2\xi_x$. *Ограничение формы равно* $2(\xi_x^2 - 4\xi_x^2) = -6\xi_x^2 < 0$. *То есть мы нашли максимум.*

10. Канонический вид отображений

10.1. **Разложение диффеоморфизмов на простейшие.**

Определение 10.1. *Назовем* C^p*-диффеоморфизм* $g\colon U \to \mathbb{R}^n$ *простейшим, если он имеет вид* $g = \begin{pmatrix} g^1 \\ \vdots \\ g^m \end{pmatrix}$, *где* $g^i \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = x^i$ *всех для* j *кроме, быть может, одного.*

Лемма 10.1. *Пусть* $p > 0$ *и* C^p*-диффеоморфизм* $f\colon G \to V$ *— такой, что* $f^i \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = x^i$ *при* $i > k$. *Тогда для любой точки* $x_0 \in G$ *найдется окрестность* $x_0 \in U \subset G$, *такая, что* $f|_U = g_1 \circ \dots \circ g_k$, *где* g_i *— определенные на* U *простейшие* C^p*-диффеоморфизмы.*

Proof. Проведем индукцию по k. При $k = 1$ лемма очевидна. Пусть утверждение доказано для при $k < m$. Докажем его для $k = m$. Мы имеем

$$df = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} & \frac{\partial f^1}{\partial x^{m+1}} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^m} & \frac{\partial f^m}{\partial x^{m+1}} & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right).$$

Таким образом ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^m} \end{pmatrix}$$

равен m. Значит, существует главный минор, не равный нулю. Пусть, для определенности, это

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^{m-1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^{m-1}}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^{m-1}}{\partial x^{m-1}} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим отображение $\tilde f = \begin{pmatrix} \tilde f^1 \\ \vdots \\ \tilde f^n \end{pmatrix}$, где $\tilde f^i = f^i$ при $i \neq m$ и $\tilde f^m = x^m$. Тогда

$$d\tilde f = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^{m-1}} & & & \\ \dots & \dots & \dots & & * & \\ \frac{\partial f^{m-1}}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^{m-1}}{\partial x^{m-1}} & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right).$$

Согласно теореме об обратном отображении (следствие 9.1), отображение $\tilde f$ является C^p-диффеоморфизмом в некоторой окрестности U точки x_0. Отображение $h = f \circ \tilde f^{-1}$ является простейшим. Но $f = h \circ \tilde f$, а к отображению $\tilde f$ можно применить предположение индукции. □

При $k = n$ лемма дает

Теорема 10.1. *При $p > 0$ любой C^p-диффеоморфизм $f\colon G \to V$ разлагается на простейшие C^p-диффеоморфизм в некоторой окрестности любой своей внутренней точки.*

10.2. **Отображения постоянного ранга.**

Определение 10.2. *Отображения $f\colon U \to E$, $f \in C^p(U)$, и $h\colon V \to F$, $h \in C^p(V)$ называются C^p-эквивалентными, если существуют C^p-диффеоморфизмы $\phi\colon U \to V$ и $\psi\colon E \to F$, такие что $h \circ \phi = \psi \circ f$, то есть следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\phi} & V \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & {\scriptstyle h}\big\downarrow \\ E & \xrightarrow{\psi} & F \end{array}$$

Задача 10.1. *Докажите, что отношение C^p-эквивалентности симметрично, транзитивно и, следовательно, действительно является отношением эквивалентности.*

Определение 10.3. *Рангом отображения $f\colon U \to E$ в точке $x_0 \in U$ называется ранг оператора df_{x_0}, то есть ранг описывающей его матрицы.*

Теорема 10.2. *Пусть в точке $x_0 \subset G \subset \mathbb{R}^n$ ранг отображения $f\colon G \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^p(G)$, равен n. Тогда существует окрестность $x_0 \in U \subset G$, в которой это отображение C^p-эквивалентно тождественному отображению.*

Proof. Согласно теореме об обратном отображении, существуют окрестности $G \supset U \ni x_0$ и $V \ni f(x_0)$, такие что $f|_U\colon U \to V$ есть C^p-диффеоморфизм. Положим $\psi = f^{-1}$ и обозначим через h и ϕ тождественные отображения. Тогда $h \circ \phi = \psi \circ f$. □

Задача 10.2. *Пусть ранг отображения $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ в точке $x_0 \in G$ равен r. Докажите, что существует окрестность $G \supset U \ni x_0$, в которой ранг отображения f больше или равен r. Бывает ли так, что ранг отображения f больше, чем r во всех точках $x \neq x_0$?*

Рассмотрим отображения постоянного ранга.

Пример 10.1. *Отображение $\mathcal{P}_{n,k}\colon \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ (где $k \leq n$) имеет ранг k во всех точках.*

Теорема 10.3. *Пусть ранг отображения $f\colon G \to \mathbb{R}^m$, $f \in C^p(G)$, равен k всюду на $G \subset \mathbb{R}^n$. Тогда для любой точки $x_0 \in G$ существует окрестность $U \ni x_0$, на которой это отображение C^p -эквивалентно проекции $\mathcal{P}_{n,k}$.*

Proof. Можно считать, что $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^m \end{pmatrix}$, и матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^k}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^k}{\partial x^k} \end{pmatrix}$$

невырождена. Положим $\phi = \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \vdots \\ \phi^n \end{pmatrix}$, где $\phi^i = f^i$ при $i \leq k$ и $\phi^i \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = x^i$ при $i > k$. Тогда

$$d\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^k} & \frac{\partial f^1}{\partial x^{k+1}} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots & & & \\ \frac{\partial f^k}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^k}{\partial x^k} & \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}} & \dots & \frac{\partial f^k}{\partial x^n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Согласно теореме об обратном отображении, существует окрестность $G \supset U \ni x_0$, в которой ϕ является C^p-диффеоморфизмом. Положим $g = f \circ \phi^{-1}$. Тогда $g = \begin{pmatrix} g^1 \\ \vdots \\ g^m \end{pmatrix}$, где $g^i \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = x^i$ при $i \leq k$. Матрица Якоби отображения g равна

$$dg = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial g^{k+1}}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial g^{k+1}}{\partial x^k} & \frac{\partial g^{k+1}}{\partial x^{k+1}} & \dots & \frac{\partial g^{k+1}}{\partial x^n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \frac{\partial g^m}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial g^m}{\partial x^k} & \frac{\partial g^m}{\partial x^{k+1}} & \dots & \frac{\partial g^m}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

С другой стороны, согласно теореме 8.2, мы имеем $dg = df d(\phi^{-1})$, и, значит, ранг g на $\tilde{V} = \phi(U)$ равен k. Следовательно, правая нижняя четверть матрицы нулевая. Согласно следствию 7.1, отсюда вытекает, что функции $g^{k+1}, \dots, g^m$ не зависят от $x^{k+1}, \dots, x^n$.

Рассмотрим теперь отображение $\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \vdots \\ \psi^m \end{pmatrix}$, где $\psi^i \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \vdots \\ \tilde{x}^m \end{pmatrix} = \tilde{x}^i$ при $i \le k$ и $\psi^i \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \vdots \\ \tilde{x}^m \end{pmatrix} = \tilde{x}^i - g^i \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \vdots \\ \tilde{x}^k \end{pmatrix}$ при $i > k$. Тогда $\psi \in C^p(V)$ и матрица Якоби отображения ψ имеет следующий вид:

$$d\psi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\partial g^{k+1}}{\partial x^1} & \dots & -\frac{\partial g^{k+1}}{\partial x^k} & 1 & \dots & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ -\frac{\partial g^m}{\partial x^1} & \dots & -\frac{\partial g^m}{\partial x^k} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Согласно теореме об обратном отображении, существует окрестность $f(x_0) \in V \subset \tilde{V}$, в которой ψ является C^p-диффеоморфизмом. Положим теперь $h = \psi \circ f \circ \phi^{-1} \in C^p(V)$. Тогда

$$h(x) = \psi \circ f \circ \phi^{-1}(x) = \psi(g(x)) = \psi \begin{pmatrix} g^1(x) \\ \vdots \\ g^m(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \psi^1 \begin{pmatrix} g^1(x) \\ \vdots \\ g^m(x) \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \psi^m \begin{pmatrix} g^1(x) \\ \vdots \\ g^m(x) \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

При $j \le k$ мы имеем $g^j(x) = x^j$ и, значит,

$$h(x) = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^k \\ g^{k+1}(x) - g^{k+1}(x) \\ \vdots \\ g^m(x) - g^m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

10.3. **Лемма Морса.** Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^m$. Максимально возможный ранг отображения $f\colon U \to E$ в точке $x \in U$ равен $\min(n, m)$. Такие точки образуют открытое множество (задача 10.2) и на нем отображение f локально (то есть в окрестности каждой точки) эквивалентно линейному вложению или линейной проекции (теорема 10.3). Остальные точки называются критическими. Именно они определяют глобальные свойства отображений. И так:

Определение 10.4. *Точки x_0, в которых ранг отображения $f\colon U \to E$ меньше $\min(\dim U, \dim E)$, называются критическими.*

В частности, точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ является критической точкой функции f, если и только если $df_{x_0} = 0$. В этом случае $f(x)-f(x_0) = \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)(x^i-x_0^i)(x^j-x_0^j)+o(\|x-x_0\|^2)$.

Определение 10.5. *Критическая точка x_0 называется невырожденной, если гессиан $\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)\}$ — невырожденная, матрица.*

Пример 10.2. *Точка 0 — критическая точка функции $f(x) = \sum a_{ij}x^i x^j$ $(a_{ij} = a_{ji})$. Она невырожденна, если и только если матрица a_{ij} невырожденна.*

Задача 10.3. *Пусть функции $f\colon U \to E$ и $h\colon V \to F$, C^2-эквивалентны, то есть $f\phi = \varphi h$, где $\phi, \varphi \in C^2$. Докажите, что точка $y_0 = \phi(x_0) \in V$ является критической точкой функции h, если x_0 — критическая точка функции f, причем y_0 невырожена, если x_0 невырожденна.*

Определение 10.6. *Окрестность U точки $0 \in \mathbb{R}^n$ назовем* звездной, *если $\lambda U \subset U$ для любого $0 < \lambda < 1$.*

Лемма 10.2 (лемма Адамара). *Пусть функция $f \subset C^p(U)$ $(p > 0)$ определена в звездной окрестности U точки 0 и $f(0) = 0$. Тогда существуют функции g_i, такие что $f\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \sum\limits_{i=1}^n x^i g_i \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$.*

Proof. Зафиксируем вектор $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ и рассмотрим функцию $F(t) = f(tx)$. По теореме Ньютона-Лейбница

$$f(x) = F(1) = \int\limits_0^1 F'(t)dt = \int\limits_0^1 \frac{df}{dt}\begin{pmatrix} tx^1 \\ \vdots \\ tx^n \end{pmatrix} dt = \int\limits_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\begin{pmatrix} tx^1 \\ \vdots \\ tx^n \end{pmatrix}\right) dt =$$

$$= \sum_{i=1}^n x^i \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}\begin{pmatrix} tx^1 \\ \vdots \\ tx^n \end{pmatrix} dt = \sum_{i=1}^n x^i g_i,$$

где $g_i\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}\begin{pmatrix} tx^1 \\ \vdots \\ tx^n \end{pmatrix} dt$ $\square$

Задача 10.4. *Докажите, что $g_i \in C^{p-1}(U)$ и $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(0)$.*

Теорема 10.4 (лемма Морса). *Пусть $x_0 \in G \subset \mathbb{R}^n$ — невырожденная критическая точка функции $f \in C^3(G)$. Тогда существует окрестность $U \ni x_0$, в которой функция f C^p-эквивалентна $(p > 1)$ функции $g(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \tau_i (x^i)^2$, $\tau_i = \pm 1$.*

Proof. Функции $f(x)$ и $q(x) = f(x + x_0) - f(x_0)$ — C^p-эквивалентны, причем $q(0) = 0$. По-этому утверждение теоремы достаточно доказать для $x_0 = 0$ и $f(x_0) = 0$. Дважды применяя лемму Адамара, сведем доказательство к случаю

$$f\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} x^i x^j h_{ij} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix},$$

где $h_{ij}(0) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(0)$. Будем приводить эту квадратичную форму к диагональному виду с помощью диффеоморфизмов. Сначала приведем ее к виду $\pm(x^1)^2 + \sum\limits_{i,j>1} h_{ij} x^i x^j$, потом к виду $\pm(x^1)^2 \pm (x^2)^2 + \sum\limits_{i,j>2} h_{ij} x^i x^j$, и.т.д. Опишем общий шаг. Пусть

$$f\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \pm(x^1)^2 \pm \cdots \pm (x^{r-1})^2 + \sum_{i,j \geq r} x^i x^j h_{ij} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Согласно задаче 10.3, точка 0 — невырожденная критическая точка, и, следовательно, матрица $\{h_{ij}(0)\}$ невырождена. Используя линейные замены переменных $x^r, \ldots, x^n$, можно считать, что $h_{rr}(0) \neq 0$ и, более того, $h_{rr} \neq 0$ на некоторой окрестности $G \supset V \ni 0$. Рассмотрим функцию $\phi\colon V \to \mathbb{R}^n$, где $\phi^i(x) = x^i$ при $i \neq r$ и $\phi^r(x) = \sqrt{|h_{rr}(x)|}\left(x^r + \sum\limits_{i>r} \frac{x^i h_{ir}(x)}{h_{rr}(x)}\right)$. Тогда $\frac{d\phi^r(x)}{dx^r}(0) = \sqrt{|h_{rr}(x)|} \neq 0$, якобиан функции ϕ не равен нулю в точке 0, и, следовательно, ϕ — диффеоморфизм в некоторой окрестности U $(V \supset U \ni 0)$. Кроме того,

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} &= \pm(x^1)^2 \pm \cdots \pm (x^{r-1})^2 + \sum_{i,j \geq r} x^i x^j h_{ij}(x^1, \ldots, x^n) \\ = \pm(x^1)^2 \pm \ldots &\cdots \pm (x^{r-1})^2 + (x^r)^2 h_{rr}(x) + 2\sum_{j>r} x^r x^j h_{rj}(x) + \sum_{i,j>r} x^i x^j h_{ij}(x) \\ = \pm(\phi^1(x))^2 \pm \ldots \cdots \pm (\phi^r(x))^2 &- \frac{1}{h_{rr}}(x)\left(\sum_{i>r} \phi^i(x) h_{ir}(x)\right)^2 + \sum_{i,j>r} (\phi^i(x))^2 (\phi^j(x))^2 h_{ij}(x). \end{aligned}$$

Таким образом, мы нашли диффеоморфизм ϕ, увеличивающий количество "правильных" членов в представлении функции f. $\square$

Задача 10.5. *Количество плюсов и минусов среди чисел τ_i называется сигнатурой критической точки. Как найти сигнатуру по ряду Тейлора функции f?*