

Математические основы естествознания

Статистическая физика

Листок СФ-4. 6-вершинная модель.

Обязательные задачи: 1а, 2а.

1. Рассмотрим 6-вершинную модель с периодическими граничными условиями и матрицей локальных бoльцмановских весов (R -матрицей)

$$R = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

в базисе $\mathbf{v}_+ \otimes \mathbf{v}_+$, $\mathbf{v}_- \otimes \mathbf{v}_+$, $\mathbf{v}_+ \otimes \mathbf{v}_-$, $\mathbf{v}_- \otimes \mathbf{v}_-$, где $\mathbf{v}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – базис в \mathbb{C}^2 . Трансфер-матрица определяется как $T = \text{tr}_{V_0}(R_{01}R_{02}\dots R_{0N})$, где R_{ij} действует нетривиально в $V_i \otimes V_j$, $V_i \cong \mathbb{C}^2$.

- а) Показать, что вектор $\Omega_- = \underbrace{\mathbf{v}_- \otimes \mathbf{v}_- \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_-}_N$, является собственным для трансфер-матрицы и найти собственное значение.

- б) Показать, что вектор

$$\sum_{n=1}^N z^n \underbrace{\mathbf{v}_- \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_-}_{n-1} \otimes \mathbf{v}_+ \otimes \underbrace{\mathbf{v}_- \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_-}_{N-n}$$

где z – комплексное число, удовлетворяющее условию $z^N = 1$, является собственным для трансфер-матрицы и найти собственное значение.

- в)* Найти собственные векторы в подпространстве с двумя перевернутыми стрелками.

2. Будем пользоваться параметризацией статовесов $a = \sinh(u + 2\eta)$, $b = \sinh u$, $c = \sinh 2\eta$, где u – спектральный параметр.

- а) Показать, что трансфер-матрица $T(0)$ пропорциональна матрице циклической перестановки:

$$T(0)_{\alpha_1, \dots, \alpha_N}^{\alpha'_1, \dots, \alpha'_N} = \sinh^N 2\eta \delta_{\alpha_1 \alpha'_2} \delta_{\alpha_2 \alpha'_3} \dots \delta_{\alpha_N \alpha'_1}$$

- б) Найти

$$H = T^{-1}(0) \left. \frac{dT(u)}{du} \right|_{u=0}$$

Ответ выразить через матрицы Паули

$$\sigma_n^a = \underbrace{\mathbb{I} \otimes \dots \otimes \mathbb{I}}_{n-1} \otimes \sigma^a \otimes \underbrace{\mathbb{I} \otimes \dots \otimes \mathbb{I}}_{N-n}, \quad a = x, y, z.$$