Глава 17

О топологии пространств модулей

Исследование топологии пространств модулей кривых — одна из наиболее важных современных задач. У нас есть представление о том, как выглядят компактифицированные пространства модулей стабильных кривых в простейших случаях — рациональных кривых и $\overline{\mathcal{M}}_{1;1}$.

Что можно сказать о топологии более сложных пространств? Вообще, в каких терминах ее можно описывать?

Прежде всего хотелось бы научиться описывать когомологии пространств модулей — числа Бетти и, что гораздо сложнее, структуру кольца в когомологиях.

Пространства модулей рациональных кривых с отмеченными точками это многообразия. Однако пространства модулей кривых старших родов являются лишь орбиобразиями, и перед нами возникает нетривиальный вопрос, что такое когомологии и числа Бетти орбиобразия.

В каких терминах можно описывать структуру кольца когомологий компактного многообразия? Прежде всего, нужно указать образующие этого кольца. Двойственность Пуанкаре для компактных многообразий показывает, что в качестве образующих могут выступать классы когомологий, представленные различными компактными подмногообразиями в исследуемом многообразии. Каждое такое подмногообразие S коразмерности k описывает класс целочисленных k-мерных когомологий, значение которого на цикле (подмногообразии) T размерности k равно числу $S \cdot T$ точек пересечения многообразий S и T. (Если циклы S и T пересекаются нетрансверсально, то нужно заменить цикл T циклом T', представляющим тот же гомологический класс и имеющим трансверсальное пересечение с S.)

В пространствах модулей есть естественные кандидаты на многообразия, представляющие базисные когомологические классы. Прежде всего, это *граничные страты.* Напомним, что границей компактифицированного пространства модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ называется подмногообразие особых кривых,

$\partial\overline{\mathcal{M}}_{g;n} = \overline{\mathcal{M}}_{g;n} \setminus \mathcal{M}_{g;n}$. Это подмногообразие стратифицировано — каждому стабильному модулярному графу соответствует страт кривых, модулярный граф которых изоморфен данному. Замыкание такого страта и представляет соответствующий класс когомологий. Мы видели, например, что кольцо когомологий пространств модулей рациональных кривых с отмеченными точками порождено классами стратов комплексной коразмерности один. Эти страты соответствуют простейшим вырождениям рациональных кривых — разбиениям на две неприводимые компоненты. Однако для пространств модулей эллиптических кривых $\overline{\mathcal{M}}_{1;n}$ аналогичное утверждение уже неверно. Скажем, у пространства $\overline{\mathcal{M}}_{1,11}$ имеются нетривиальные нечетные когомологии $H^{11}(\overline{\mathcal{M}}_{1,11})$, чего не могло бы быть, если бы кольцо его когомологий было порождено классами, двойственными граничным стратам и имеющими поэтому степень 2.

Другой вид естественно возникающих когомологических классов — это характеристические классы различных расслоений на пространстве модулей. Этим расслоениям будет посвящен отдельный раздел. Их характеристические классы также имеют четную степень.

В настоящее время общие подходы к описанию колец когомологий пространств модулей отсутствуют. Скорее всего, при больших значениях рода g эти кольца очень сложны, и их эффективное описание невозможно. В то же время, приложения требуют, как правило, лишь частичного знания этих колец — эти возможные приложения мы также обсудим.

17.1 Об эйлеровой характеристике пространств модулей

Из всех топологических инвариантов проще всего (после размерности) подсчитывать эйлерову характеристику, но даже она была вычислена сравнительно недавно. Вычисление эйлеровой характеристики пространств модулей рациональных кривых с отмеченными точками относительно несложно — мы описали его в главе **??**, поскольку оно является настоящим многообразием, а не орбиобразием.

Прежде, чем определять эйлерову характеристику орбиобразия, дадим формальное определение орбиобразия.

Определение 17.1.1. *Гладким d-мерным комплексным орбиобразием* называется хаусдорфово топологическое пространство M, на котором задан атлас $\langle U_\alpha, V_\alpha, G_\alpha, \phi_\alpha \rangle$, где

- множество $\{U_\alpha\}$ представляет собой покрытие пространства M открытыми множествами, образующими базу его топологии;
- множество $\{V_\alpha\}$ представляет собой набор открытых подмножеств в $\mathbf{C}^d$;
- каждое из множеств $\{G_\alpha\}$ является конечной группой автоморфизмов множества V_α;

- всякое $\phi_\alpha : V_\alpha \to U_\alpha$ является непрерывным отображением, слои которого совпадают с орбитами действия группы G_α.

При этом должны выполняться следующие условия согласования: для любой пары α, β, таких, что $U_\alpha \subset U_\beta$, существует такой инъективный гомеоморфизм $h_{\alpha\beta} : G_\alpha \to G_\beta$ и такое гладкое вложение $\phi_{\alpha\beta} : V_\alpha \to V_\beta$, что

- для всех $g \in G_\alpha$ и $x \in V_\alpha$ имеет место равенство $\phi_{\alpha\beta}(gx) = h_{\alpha\beta}(g)\phi_{\alpha\beta}(x)$;
- для всех $x \in V_\alpha$ справедливо равенство $\phi_\beta(\phi_{\alpha\beta})(x) = \phi_\alpha(x)$.

В частности, факторпространство комплексного многообразия по действию конечной группы (или даже по дискретному действию бесконечной группы) является орбиобразием.

Эйлерову характеристику орбиобразия O можно определить двумя способами. Во-первых, предположим, что мы можем разбить орбиобразие на открытые клетки, каждая из которых представляет собой факторпространство вида $\mathbb{R}^k/G$, где G — некоторая конечная группа. Тогда положим

$$\chi(O) = \sum \frac{(-1)^k}{|G|}.$$

Это означает, в частности, что если орбиобразие получено факторизацией многообразия по действию конечной группы, то его эйлерова характеристика равна частному эйлеровой характеристики факторизуемого многообразия и порядка группы.

Во-вторых, мы можем представить всякое орбиобразие O в виде несвязного объединения, по всем конечным группам G, подмногообразий O_G, состоящих из точек, у каждой из которых есть окрестность вида $\mathbb{R}^k/G$. Положим

$$\chi(O) = \sum_G \frac{\chi(O_G)}{|G|}.$$

Упражнение 17.1.2. Вычислите эйлерову характеристику пространства модулей $\mathcal{M}_{1;1}$ эллиптических кривых с отмеченной точкой, понимаемого как факторпространство верхней полуплоскости по действию группы $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$, согласно двум определениям. Проверьте, что в обоих случаях результат будет равен $-\frac{1}{12}$.

Упражнение 17.1.3. Докажите, что в тех случаях, когда оба определения применимы, они дают один и тот же результат.

Упражнение 17.1.4. Докажите, что эйлерова характеристика произведения орбиобразий равна произведению эйлеровых характеристик сомножителей. Более общим образом, если орбиобразие X расслоено над орбиобразием B со слоем F, то $\chi(X) = \chi(B)\chi(F)$.

Эйлеровы характеристики пространств модулей гладких кривых с одной отмеченной точкой произвольного рода были вычислены Харером и Загиром:

Теорема 17.1.5 (Харер, Загир). *Имеет место равенство*

$$\chi(\mathcal{M}_{g;1}) = \zeta(1-2g) = -\frac{B_{2g}}{2g};$$

здесь ζ *— это дзета функция Римана, а* B_{2g} *—* $2g$*-ое число Бернулли, т.е. коэффициент в разложении*

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{B_2}{2!}x^2 + \frac{B_4}{4!}x^4 + \dots,$$

$B_2 = 1/6$*,* $B_4 = -1/30$*.*

Это глубоко нетривиальный результат (впоследствии передоказанный разными людьми).

Эйлерова характеристика пространств модулей гладких кривых с произвольным числом отмеченных точек вычисляется индуктивно на основе теоремы Харера–Загира с использованием забывающего расслоения $\mathcal{M}_{g;n+1} \to \mathcal{M}_{g;n}$ аналогично тому, как мы это делали для рациональных кривых. Это расслоение дает рекуррентное соотношение

$$\chi(\mathcal{M}_{g,n+1}) = \chi(\mathcal{M}_{g;n})(2-2g-n),$$

поскольку эйлерова характеристика слоя — кривой рода g с n выколотыми точками — равна $2-2g-n$. Отметим, что отрицательность этой эйлеровой характеристики эквивалентна стабильности кривой.

Как и в случае пространств модулей стабильных рациональных кривых, эйлерову характеристику пространств модулей стабильных кривых старших родов можно вычислить, изучив его разбиение на страты. Топологически страты представляют собой произведения пространств модулей гладких кривых меньших родов, что и позволяет производить вычисления рекуррентно.

Пример 17.1.6. Вычислим эйлерову характеристику пространства $\overline{\mathcal{M}}_{1;1}$. Оно представляет собой несвязное объединение пространства модулей гладких кривых $\mathcal{M}_{1;1}$ и границы $\partial\overline{\mathcal{M}}_{1;1}$. Поэтому

$$\chi(\overline{\mathcal{M}}_{1;1}) = \chi(\mathcal{M}_{1;1}) + \chi(\partial\overline{\mathcal{M}}_{1;1}) = -\frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$$

(первое из слагаемых мы уже вычислили, а значение $\chi(\partial\overline{\mathcal{M}}_{1;1}) = \frac{1}{2}$ является результатом того, что граница состоит из одной точки, отвечающей кривой с порядком группы симметрий равным 2). Из этого вычисления вытекает, в частности, что пространство $\overline{\mathcal{M}}_{1;1}$ не представимо в виде факторкривой гладкой компактной кривой по действию конечной группы — такая факторкривая не может иметь эйлеровой характеристики 5/12.

Упражнение 17.1.7. Вычислите эйлеровы характеристики пространств $\overline{\mathcal{M}}_{1;2}$, $\overline{\mathcal{M}}_{2;1}$.

17.2 Классы Черна векторных расслоений

Помимо граничных стратов когомологические классы на многообразии можно задавать как характеристические классы естественных векторных расслоений на этом многообразии. Проще всего характеристические классы определяются для линейных расслоений (т.е. для расслоений с одномерным слоем). Нам уже приходилось встречаться с линейными расслоениями над кривыми и первыми классами Черна этих расслоений. Первый класс Черна голоморфного векторного расслоения L на многообразии M — это препятствие к существованию голоморфного сечения у такого расслоения. Первый класс Черна тривиального линейного расслоения равен нулю.

Для определения *первого класса Черна линейного расслоения* достаточно взять его произвольное ненулевое мероморфное сечение: класс когомологий, представленный дивизором нулей и полюсов такого сечения, не зависит от выбора сечения. Более того, дивизор нулей и полюсов определен однозначно с точностью до рациональной эквивалентности подмногообразий: разность двух таких дивизоров, отвечающих различным сечениям, является главным дивизором — дивизором нулей и полюсов некоторой мероморфной функции (эта функция — отношение сечений, которое корректно определено в любом линейном расслоении). Другими словами, первый класс Черна линейного расслоения корректно определен не только как элемент группы вторых когомологий, но и как элемент *кольца Чжоу* — кольца классов рациональной эквивалентности подмногообразий. Как правило, кольцо Чжоу является более тонким — но и более трудно вычислимым — инвариантом алгебраического многообразия, чем кольцо когомологий.

Зная, что такое первый класс Черна линейного расслоения, мы можем определить классы Черна векторного расслоения произвольного ранга. Пусть $p : E \to B$ — векторное расслоение ранга r над компактным комплексным многообразием (или орбифолдом) B. С этим расслоением связана его проективизация $P : \mathbb{P}E \to B$, слоями которого являются проективизации слоев расслоения p. Над тотальным пространством $\mathbb{P}E$ (которое также компактно) этого расслоения определено линейное расслоение $\mathcal{O}(1)$: каждой точке в $\mathbb{P}E$ мы сопоставляем прямую в соответствующем слое расслоения p, определяющую эту точку. С расслоением $\mathcal{O}(1)$, в свою очередь, связан первый класс Черна $\Psi = c_1(\mathcal{O}(1)) \in H^2(\mathbb{P}E)$. Рассмотрим степени этого класса $\Psi^k \in H^{2k}(\mathbb{P}E)$. При $k \geq r-1$ коразмерность класса Ψ^k не превосходит размерности базы B расслоения p, и корректно определены когомологические классы

$$s_i(E) = P_*(\Psi^{i+r-1}) \in H^{2i}(B)).$$

Составим из этих классов когомологический многочлен

$$s(E) = s_0(E) + s_1(E) + s_2(E) \dots$$

(эта сумма обрывается — все классы $s_i(E)$, размерность i которых превышает размерность базы X, равны 0). Обратный к многочлену $s(E)$ многочлен

$$c(E) = \frac{1}{s(E)} = c_0(E) + c_1(E) + c_2(E) \dots$$

называется *многочленом Черна* расслоения E, а его однородные составляющие $c_i(E) \in H^{2i}(E)$ — *классами Черна* расслоения E.

Упражнение 17.2.1. Докажите, что для случая линейного расслоения E приведенное выше определение первого класса Черна $c_1(E)$ совпадает с данным ранее и

$$c(E) = 1 + c_1(E).$$

Упражнение 17.2.2. Пусть

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

длинная точная последовательность векторных расслоений над базой B. Докажите *формулу Уитни*

$$c(F) = c(E)c(G).$$

Упражнение 17.2.3. Докажите, что для векторного расслоения ранга r все классы Черна $c_{r+1}, c_{r+2}, \dots$ обращаются в 0.

Как и первый класс Черна линейного расслоения, классы Черна расслоения произвольного ранга можно рассматривать как элементы кольца Чжоу, а не как элементы кольца когомологий.

17.3 Когомологические классы, ассоциированные с векторными расслоениями на пространствах модулей кривых

В когомологиях пространств модулей кривых принято выделять κ-, λ- и ψ-классы, ассоциированные с различными расслоениями над этим пространством и его модификациями.

Рассмотрим универсальную кривую $\pi_{g;n} : \overline{\mathcal{C}}_{g;n} \to \overline{\mathcal{M}}_{g;n}$. С этой универсальной кривой связано линейное расслоение над $\overline{\mathcal{C}}_{g;n}$, определяемое следующим образом. Гладкой точке слоя отображения $\pi_{g;n}$ мы сопоставляем кокасательную прямую к этому слою в этой точке. В результате мы получаем линейное расслоение над дополнением к множеству особых точек слоев проекции $\pi_{g;n}$ в $\overline{\mathcal{C}}_{g;n}$. Это множество особых точек имеет коразмерность 2. Действительно, все особые слои располагаются над $\partial\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ — подмногообразием коразмерности 1 в $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$, а особые точки имеют коразмерность 1 в особых слоях.

Построенное линейное расслоение однозначно продолжается на подмногообразие особых точек слоев отображения $\pi_{g;n}$. Продолженное таким образом линейное расслоение над $\overline{\mathcal{C}}_{g;n}$ называется *относительным кокасательным расслоением*, или *относительным дуализирующим пучком*, и обозначается через ϖ. Проекции степеней первого класса Черна этого класса в когомологии пространства $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ называются κ-классами:

$$\kappa_k = \pi_{g;n*}(c_1(\varpi)^{k+1}) \in H^{2k}(\overline{\mathcal{M}}_{g;n}).$$

Голоморфные сечения расслоения ϖ при ограничении на слой отображения $\pi_{g;n}$ представляют из себя в точности голоморфные 1-формы на этом слое в соответствии с данным нами определением голоморфных 1-форм на нодальной кривой. Пространство голоморфных 1-форм на кривой рода g имеет размерность g, и объединение всех этих пространств образует расслоение ранга g над $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$, которое называется *расслоением Ходжа* и обозначается через $\Lambda_{g;n} \to \overline{\mathcal{M}}_{g;n}$.

Классы Черна расслоения Ходжа обозначаются через $\lambda_i \in H^{2i}$:

$$c(\Lambda_{g;n}) = 1 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_g.$$

С i-ой отмеченной точкой можно связать линейное расслоение $\mathcal{L}_i$ на пространстве модулей кривых с отмеченными точками. Слоем этого расслоения над точкой $(C; x_1, \ldots, x_n)$ является кокасательная прямая к кривой C в точке x_i (можно было бы взять и касательную прямую — получилось бы двойственное расслоение, однако кокасательная прямая удобнее с точки зрения построения сечений и когомологических классов). При вырождении кривых в классе стабильных кривых отмеченные точки не становятся особыми, поэтому расслоения $\mathcal{L}_i$ продолжаются и на пространство стабильных кривых. Их первые классы Черна обозначаются через ψ_i: $\psi_i = c_1(\mathcal{L}_i) \in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g;n})$.

При конкретных значениях параметров g и n между κ-, λ- и ψ-классами в кольце $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g;n})$ существуют разнообразные соотношения, которые являются предметом тщательного изучения. Вместе с классами, двойственными по Пуанкаре граничным стратам, эти классы, а также всевозможные их поднятия и прямые образы порождают подкольцо в кольце когомологий, называемое *тавтологическим кольцом.* Согласно господствующей в настоящее время точке зрения, именно изучение тавтологических колец когомологий и должно полностью обеспечить потребности физиков-теоретиков.

17.4 Индексы пересечения ψ-классов

Построим классы ψ_i на пространствах рациональных кривых с небольшим числом отмеченных точек. На $\overline{\mathcal{M}}_{0;3}$ все три класса равны нулю, поскольку многообразие базы является точкой. Построим сечение расслоения $\mathcal{L}_1$ на $\overline{\mathcal{M}}_{0;4}$. Для этого рассмотрим на гладкой рациональной кривой с отмеченными точками x_1, x_2, x_3, x_4 мероморфную 1-форму ω_{34} с полюсами первого порядка в точках x_3, x_4, имеющую вычеты $\mathrm{Res}_{x_3}\,\omega_{34} = 1$, $\mathrm{Res}_{x_4}\,\omega_{34} = -1$ и не имеющую других полюсов. Такая 1-форма единственна и нигде не обращается в нуль (в подходящей координате она записывается в виде dz/z). Ее значение $\omega_{34}(x_1)$ в точке x_1 определяет сечение расслоения $\mathcal{L}_1$. Это сечение не обращается ни в нуль, ни в бесконечность ни для какой гладкой кривой.

Продолжим теперь построенное сечение на граничные точки пространства модулей $\mathcal{M}_{0;4}$. Таких точек всего три, и они соответствуют особым кривым. На кривой $\{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}\}$ 1-форма ω_{34} выглядит так: она имеет полюса первого порядка с указанными вычетами на неприводимой компоненте, содержащей точки x_3, x_4, и она тождественно равна нулю на второй неприводимой компоненте; это означает, что $\omega_{34}(x_1) = 0$. На кривой же $\{\{x_1, x_3\}, \{x_2, x_4\}\}$ эта 1-форма имеет такой вид: на первой компоненте она имеет полюса первого порядка в x_3 и в точке пересечения первой компоненты со второй, причем вычеты равны соответственно 1 и -1; на второй компоненте она имеет полюса первого порядка в точке пересечения с первой компонентой и в точке x_4, причем с теми же вычетами. Значит значение построенной 1-формы в точке x_1 отлично от нуля. В третьей точке границы рассуждение аналогично. Тем самым, построенное нами сечение имеет единственный нуль — в одной из граничных точек компактифицированного пространства модулей — и не имеет полюсов.

Упражнение 17.4.1. Проверьте, что построенное сечение пересекает нулевое сечение расслоения $\mathcal{L}_1$ трансверсально.

Поскольку пересечение происходит в единственной точке и это пересечение трансверсально, мы заключаем что эта точка представляет класс когомологий $\psi_1 \in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{0;4})$.

Упражнение 17.4.2. Какая точка будет представлять класс когомологий ψ_3, если построить сечение по 1-форме ω_{24} с полюсами в точках x_2, x_4?

Упражнение 17.4.3. Постройте представителя когомологий класса ψ_1 на пространстве модулей $\overline{\mathcal{M}}_{0;5}$.

Классы когомологий можно умножать. Умножению классов соответствует пересечение подмногообразий, представляющих эти классы. Если взять классы (или подмногообразия) в достаточном количестве, то мы получим в произведении старший класс когомологий (представленный конечным количеством точек пересечения). В этом случае мы говорим об интеграле произведения классов. Интеграл

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g;n}} \psi_1^{m_1} \dots \psi_n^{m_n}$$

отличен от нуля только, если $m_1 + \dots + m_n = \dim \overline{\mathcal{M}}_{g;n} = 3g - 3 + n$. В частности, мы видели, что

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0;4}} \psi_1 = 1.$$

Упражнение 17.4.4. Подсчитайте

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0;5}} \psi_1^2, \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0;5}} \psi_1 \psi_2,$$

а также все возможные интегралы от произведений классов ψ по пространству $\overline{\mathcal{M}}_{0;6}$.

Упражнение 17.4.5. Докажите, что

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0;n}} \psi_1^{m_1} \dots \psi_n^{m_n} = \binom{n-3}{m_1 \dots m_n} = \frac{(n-3)!}{m_1! \dots m_n!}$$

при $m_1 + \dots + m_n = n - 3$.

Индекс пересечения классов на орбиобразиях уже не обязательно целый.

Упражнение 17.4.6. Построив подходящее сечение расслоения $\mathcal{L}_1$ на $\overline{\mathcal{M}}_{1;1}$, проверьте, что

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{1;1}} \psi_1 = \frac{1}{24}.$$

Значения индексов пересечения ψ-классов на пространствах модулей кривых произвольного рода являются предметом гипотезы Виттена, в настоящее время имеющей несколько различных доказательств. Эта гипотеза дает простые рекуррентные соотношения на индексы пересечения. Она формулируется следующим образом. Введем виттеновское обозначение

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g;n}} \psi_1^{k_1} \dots \psi_n^{k_n} = \langle \tau_{k_1} \dots \tau_{k_n} \rangle,$$

так что

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0;3}} 1 = 1 = \langle \tau_0^3 \rangle, \quad \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0;4}} \psi_1 = 1 = \langle \tau_0^3 \tau_1 \rangle,$$
$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0;5}} \psi_1 \psi_2 = 2 = \langle \tau_0^3 \tau_1^2 \rangle, \quad \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0;3}} \psi_1^2 = 1 = \langle \tau_0^4 \tau_1 \rangle.$$

Рассмотрим экспоненциальную производящую функцию от бесконечного числа переменных

$$\begin{aligned} F(t_0, t_1, t_2, \dots) &= \sum \langle \tau_0^{m_0} \tau_1^{m_1} \dots \rangle \frac{t_0^{m_0}}{m_0!} \frac{t_1^{m_1}}{m_1!} \dots \\ &= \frac{t_0^3}{6} + \frac{t_0^3 t_1^2}{6} + \frac{t_0^3 t_2}{6} + \frac{t_1}{24} + \frac{t_0 t_2}{24} + \frac{t_1^2}{24} + \frac{t_0^2 t_3}{48} + \dots \end{aligned}$$

для индексов пересечения ψ-классов. Тогда ее вторая производная $U(t_0, t_1, t_2, \dots) = \frac{\partial^2 F}{\partial t_0^2}$ удовлетворяет уравнению Кортевега–де Фриза

$$\frac{\partial U}{\partial t_1} = U \frac{\partial U}{\partial t_0} + \frac{1}{12} \frac{\partial^3 U}{\partial t_0^3}.$$

Вместе с уже известными нам значениями индексов пересечений в роде 0 уравнение Кортевега–де Фриза позволяет рекуррентно вычислить индексы пересечений ψ-классов в пространствах $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ для любых g и n.