1 Вводная лекция

2 Элементы статистической термодинамики

3 Модели статистической механики на решетке

3.1 Одномерная модель Изинга

3.2 Модель среднего поля

3.3 Двумерная модель Изинга

3.4 Вершинные модели

3.4.1 16-вершинная модель

Рассмотрим решетку размера $N \times M$ с квадратными ячейками, свернутую в тор, т.е. плоскую решетку с $M+1$ строками и $N+1$ столбцами, у которой крайние строки и столбцы отождествлены. Пусть на каждом горизонтальном ребре нарисована стрелка, ориентированная влево или вправо, а на каждом вертикальном – вверх или вниз. Поскольку в каждом узле решетки сходятся 4 ребра, имеем 16 возможных комбинаций стрелок на них (типов вершин). Припишем каждой возможной комбинации $j = 1, \ldots, 16$ число ε_j (энергию данной локальной конфигурации). Полная энергия, отвечающая некоторой расстановке стрелок на всех ребрах, находится тогда как сумма локальных энергий по всем узлам:

$$E = \sum_{j=1}^{16} N_j \varepsilon_j$$

где N_j – число узлов с комбинацией стрелок типа j в данной конфигурации. Полезно также ввести величины $w_j = e^{-\varepsilon_j/T}$, которые называются локальными больцмановскмими весами (они считаются одинаковыми для всех узлов). Статсумма равна

$$Z = \sum e^{-E/T} = \sum \prod_j w_j^{N_j}$$

где суммирование производится по всем конфигурациям стрелок на решетке, а E – полная энергия конфигурациии. Обычно интерес представляет вычисление свободной энергии на один узел в термодинамическом пределе как функции локальных больцмановских весов:

$$f = -T \lim_{M,N\to\infty} \frac{\log Z}{MN}$$

По понятной причине данная модель называется 16-вершинной. В общем случае она не имеет точного решения.

Отметим, что больцмановские веса некоторых локальных конфигураций могут быть равны 0 (при этом энергия равна $+\infty$). Это значит, что данные локальные конфигурации в вершине считаются запрещенными. Тогда число разрешенных типов вершин уменьшается. Таким образом получаются 8-вершинная и 6-вершинная модели, которые уже могут быть решены точно, по крайней мере в термодинамическом пределе (см. далее).

Вместо стрелок можно использовать спиновые переменные $\sigma = \pm 1$, живущие *на ребрах* решетки: если стрелка направлена вправо или вверх, $\sigma = +1$, а если влево или вниз, $\sigma = -1$. Каждой конфигурации стрелок в узле соответствуют 4 величины $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, принимающие значения ± 1. Переменные α, α' живут на вертикальных ребрах, а β, β' – на горизонтальных (рис. 1). Локальный больцмановский вес, отвечающий такой конфигурации, будем обозначать

$$R_{\alpha}^{\alpha'}(\beta, \beta') \qquad \text{или} \qquad R_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}$$

Рассмотрим какой-либо горизонтальный ряд решетки и прилегающие к нему снизу и сверху вертикальные ребра. Пусть $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_M\}$ – переменные на вертикальных ребрах нижнего ряда, а $\{\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_M\}$ – верхнего (рис. 2). Будем пока считать их фиксированными и найдем статсумму такого горизонтального "слоя" решетки, которую обозначим через

$$T_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_M}^{\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_M}$$

Для этого надо взять произведение локальных больцмановских весов и просуммировать по всем состояниям на горизонтальных ребрах:

$$T_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_M}^{\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_M} = \sum_{\beta_1, \ldots, \beta_N} R_{\alpha_1}^{\alpha'_1}(\beta_1, \beta_2) R_{\alpha_2}^{\alpha'_2}(\beta_2, \beta_3) \ldots R_{\alpha_N}^{\alpha'_N}(\beta_N, \beta_1) \tag{1}$$

Величину $T_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_M}^{\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_M}$ полезно рассматривать как матричный элемент оператора T, действующего в пространстве $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \ldots \otimes \mathbb{C}^2 = (\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$, взятого в базисе $\mathsf{v}_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes \mathsf{v}_{\alpha_N}$, где $\mathsf{v}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{v}_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – естественный базис в $\mathbb{C}^2$:

$$T \mathsf{v}_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes \mathsf{v}_{\alpha_N} = T_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_M}^{\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_M} \mathsf{v}_{\alpha'_1} \otimes \ldots \otimes \mathsf{v}_{\alpha'_N}$$

(по повторяющимся индексам суммирование). Тогда

$$Z = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}} T^M$$

где след берется в пространстве $\mathcal{H}$. Таким образом, для нахождения статсуммы достаточно найти собственные значения матрицы T. Для нахождения удельной свободной энергии в пределе $N, M \to \infty$ достаточно знать асимптотику при $N \to \infty$ наибольшего собственного значения. В силу важности матрица T имеет специальное название. Она называется *трансфер-матрицей* или матрицей перехода, поскольку описывает переход от одного горизонтального ряда вертикальных ребер к следующему. Диагонализация трансфер-матрицы – первая основная задача в теории вершинных моделей. (Вторая основная задача – нахождение корреляционных функций, но она существенно сложнее.)

Обсудим подробнее структуру трансфер-матрицы. Будем считать $R_{\alpha}^{\alpha'}(\beta, \beta')$ 2×2 матрицей $R_{\alpha}^{\alpha'}$ по индескам β, β', у которой матричные элементы в свою очередь являются 2×2 матрицами (по индексам α, α'):

$$(R_{\alpha}^{\alpha'})_{\beta\beta'} = R_{\alpha}^{\alpha'}(\beta, \beta')$$

Иными словами, рассмотрим $R_\alpha^{\alpha'}(\beta,\beta')$ как блочную матрицу. Тогда правая часть формулы (1) – не что иное, как матричное произведение в горизонтальном (общем для всех) пространстве $\mathbb{C}^2$ (оно называется *вспомогательным пространством*) с последующим взятием следа в нем:

$$T^{\alpha'_1,\alpha'_2,\ldots,\alpha'_M}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_M} = \mathrm{tr}_{\mathbb{C}^2}\Big(R^{\alpha'_1}_{\alpha_1} R^{\alpha'_2}_{\alpha_2} \ldots R^{\alpha'_N}_{\alpha_N}\Big)$$

Таким образом, элементарным строительным блоком является набор больцмановских весов $R_\alpha^{\alpha'}(\beta,\beta') = R_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}$. Их можно объединить в матрицу 4×4 и понимать ее как матрицу линейного оператора в тензорном произведении двух двумерных пространств. Хотя исходно все больцмановские веса были вещественными (и, более того, неотрицательными) числами, с алгебраической точки зрения удобно рассматривать наши матрицы над полем комплексных чисел. Тогда совокупность больцмановских весов задает линейный оператор

$$\mathsf{R}:\ \mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$$

В базисе $\mathsf{v}_\alpha\otimes\mathsf{v}_\beta$ он действует так:

$$\mathsf{R}:\ \mathsf{v}_\alpha\otimes\mathsf{v}_\beta \mapsto R_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}\mathsf{v}_{\alpha'}\otimes\mathsf{v}_{\beta'}$$

(по повторяющимся индексам суммирование). Матрица R в базисе $\mathsf{v}_+\otimes\mathsf{v}_+$, $\mathsf{v}_-\otimes\mathsf{v}_+$, $\mathsf{v}_+\otimes\mathsf{v}_-$, $\mathsf{v}_-\otimes\mathsf{v}_-$ запишется виде

$$\mathsf{R} = \begin{pmatrix} R^{++}_{++} & R^{-+}_{++} & R^{+-}_{++} & R^{--}_{++} \\ R^{++}_{-+} & R^{-+}_{-+} & R^{+-}_{-+} & R^{--}_{-+} \\ R^{++}_{+-} & R^{-+}_{+-} & R^{+-}_{+-} & R^{--}_{+-} \\ R^{++}_{--} & R^{-+}_{--} & R^{+-}_{--} & R^{--}_{--} \end{pmatrix}$$

Наконец, укажем способ компактной безындексной записи трансфер-матрицы. Если имеется тензорное произведение $V_1\otimes\ldots\otimes V_N$ одинаковых пространств $V_i\cong\mathbb{C}^2$, обозначим R_{ij} оператор, действующий на произведении $V_i\otimes V_j$ как R, а на других как тождественный оператор. Тогда

$$T = \mathrm{tr}_{V_0}\Big(\mathsf{R}_{01}\mathsf{R}_{02}\ldots\mathsf{R}_{0N}\Big)$$

Стоящий под следом оператор $\mathcal{T} = \mathsf{R}_{01}\mathsf{R}_{02}\ldots\mathsf{R}_{0N}$ также имеет специальное название. По историческим причинам (по аналогии с методом обратной задачи) он называется квантовой матрицей монодромии. Его естественно записывать как 2×2 матрицу во вспомогательном пространстве, элементы которой являются операторами в пространстве $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad T = A + D$$

Это по сути трансфер-матрица для цепочки с открытыми концами, спины на которых фиксированы.

3.4.2 6-вершинная модель

Будем рассматривать лишь те вершины, в которых число входящих стрелок равно числу выходящих, а остальные объявим запрещенными (их больцмановские веса положим равными 0). Таких конфигураций ровно 6 (рис. 3). Они объединяются в пары, соответствующие обращению всех стрелок. Будем считать, что больцмановские веса одинаковы для вершин, получающихся друг из друга обращением всех стрелок. Таким образом, в модели имеются 3 независимых параметра (а по сути два, т.к. зависимость от общего множителя тривиальна). Такая модель называется (симметричной) 6-вершинной моделью.

R-матрица. Матрица локальных больцмановских весов для 6-вершинной модели имеет вид

$$\mathsf{R} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Она называется R-матрицей. Укажем другие способы ее записи, которые в ряде случаев более удобны. Для этого введем стандартные матрицы Паули

$$\sigma^x = \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и для единообразия обозначим через σ^4 единичную матрицу 2×2. Удобно также ввести

$$\sigma^+ = \frac{1}{2}(\sigma^x + i\sigma^y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^- = \frac{1}{2}(\sigma^x - i\sigma^y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathsf{R} &= \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2}\,\sigma^4 + \frac{a-b}{2}\,\sigma^3 & c\sigma^- \\ c\sigma^+ & \frac{a+b}{2}\,\sigma^4 - \frac{a-b}{2}\,\sigma^3 \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{a+b}{2}\,\sigma^4 \otimes \sigma^4 + \tfrac{a-b}{2}\,\sigma^3 \otimes \sigma^3 + \tfrac{c}{2}\,\sigma^2 \otimes \sigma^2 + \tfrac{c}{2}\,\sigma^1 \otimes \sigma^1 \end{aligned}$$

Простейшие собственные векторы трансфер-матрицы. Один собственный вектор трансфер-матрицы можно найти совсем легко. Рассмотрим вектор

$$\Omega_+ = \underbrace{\mathsf{v}_+ \otimes \mathsf{v}_+ \otimes \ldots \otimes \mathsf{v}_+}_{N}$$

и покажем, что он собственный. Действительно, поскольку $\sigma^z \mathsf{v}_+ = \mathsf{v}_+$, $\sigma^+ \mathsf{v}_+ = 0$, $\sigma^- \mathsf{v}_+ = \mathsf{v}_-$, на j-м узле имеем

$$\mathsf{R}_{0j}\,\mathsf{v}_+ == \begin{pmatrix} a\mathsf{v}_+ & c\mathsf{v}_- \\ 0 & b\mathsf{v}_+ \end{pmatrix}$$

При перемножении таких матриц матричные элементы должны перемножаться тензорно. Поскольку матрица треугольная, за диагональными элементами легко проследить и получить

$$\mathcal{T}\Omega_+ = \begin{pmatrix} A\Omega_+ & B\Omega_+ \\ C\Omega_+ & D\Omega_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^N\Omega_+ & \star \\ 0 & b^N\Omega_+ \end{pmatrix}$$

где звездочкой обозначено выражение, вид которого нам для этого вычисления не важен. После взятия следа находим

$$T\Omega_+ = (a^N + b^N)\,\Omega_+$$

т.е. вектор Ω_+ действительно собственный с собственным значением $a^N + b^N$. Аналогично обстоит дело с вектором $\Omega_- = \mathsf{v}_- \otimes \mathsf{v}_- \otimes \ldots \otimes \mathsf{v}_-$. Можно показать, что если $a > b + c$, это максимальное собственное значение.

Остальные собственные векторы можно искать в секторах с фиксированным числом перевернутых стрелок (поскольку действие трансфер-матрицы сохраняет их число). Например, собственный вектор в N-мерном подпространстве с одной перевернутой стрелкой можно искать в виде

$$\sum_{n=1}^{N} z^n \underbrace{\mathsf{v}_+ \otimes \ldots \otimes \mathsf{v}_+}_{n-1} \otimes\ \mathsf{v}_- \otimes \underbrace{\mathsf{v}_+ \otimes \ldots \otimes \mathsf{v}_+}_{N-n}$$

где z – комплексное число, удовлетворяющее условию $z^N = 1$ (в силу периодических граничных условий). Явное построение собственных векторов можно, оказывается, провести и в секторе с произвольным числом перевернутых стрелок. Эта довольно громоздкая, но важная конструкция называется *координатным анзацем Бете* (или подстановкой Бете). В принципе она дает полное решение 6-вершинной модели. Исторически модель была впервые решена именно этим методом.

Отметим, что в общей 16-вершинной модели векторы $\Omega_\pm$ не являются собственными, а действие трансфер-матрицы не сохраняет число перевернутых стрелок. Так же обстоит дело и в случае 8-вершинной модели, в которой разрешенными являются только вершины с четным числом входящих стрелок. 8-вершинная модель, как и 6-вершинная, является точно решаемой, но координатный анзац Бете к ней неприменим. Ее решение было получено другими, алгебраическими методами (развитыми в первую очередь в работах Р.Бакстера и Ленинградской школы), с которыми мы познакомимся на более простом премере 6-вершинной модели.

Коммутирующие трансфер-матрицы и уравнение Янга-Бакстера. Ключом к алгебраическому решению 6-вершинной модели является нахождение коммутативного семейства трансфер-матриц. Именно, мы покажем, что трансфер-матрицы моделей, для которых

$$\Delta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

имеет одно и то же значение, коммутируют.

Итак, зададимся вопросом, когда трансфер-матрицы

$$T = \mathrm{tr}_{V_0}\mathcal{T} = \mathrm{tr}_{V_0}\Big(\mathsf{R}_{01}\mathsf{R}_{02}\ldots\mathsf{R}_{0N}\Big)\,, \quad T' = \mathrm{tr}_{V_0}\mathcal{T}' = \mathrm{tr}_{V_0}\Big(\mathsf{R}'_{01}\mathsf{R}'_{02}\ldots\mathsf{R}'_{0N}\Big)$$

коммутируют. Здесь R' – R-матрица с параметрами (a', b', c'). Произведения TT' и $T'T$ можно записать в виде

$$TT' = \mathrm{tr}_{V_0\otimes V_0}\Big(\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}'\Big)\,, \qquad T'T = \mathrm{tr}_{V_0\otimes V_0}\Big(\mathcal{T}'\otimes\mathcal{T}\Big)$$

В правых частях $\mathcal{T}$-матрицы перемножаются тензорно, а их элементы – как операторы в $\mathcal{H}$, с соблюдением порядка. Например:

$$\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}' = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' & AB' & BA' & BB' \\ AC' & AD' & BC' & BD' \\ CA' & CB' & DA' & DB' \\ CC' & CD' & DC' & DD' \end{pmatrix}$$

Для коммутативности трансфер-матриц достаточно, чтобы существовала невырожденная 4×4 матрица M такая, что

$$\mathcal{T}'\otimes\mathcal{T} = \mathsf{M}(\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}')\mathsf{M}^{-1} \quad \text{или} \quad \mathsf{M}(\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}') = (\mathcal{T}'\otimes\mathcal{T})\mathsf{M}$$

Тогда следы от $\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}'$ и $\mathcal{T}'\otimes\mathcal{T}$ будут равны в силу цикличности следа.

Пусть P – оператор перестановки сомножителей в тензорном произведении $\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$: $\mathsf{P}\,\mathsf{v}_\alpha\otimes\mathsf{v}_\beta = \mathsf{v}_\beta\otimes\mathsf{v}_\alpha$. В базисе $\mathsf{v}_+\otimes\mathsf{v}_+$, $\mathsf{v}_-\otimes\mathsf{v}_+$, $\mathsf{v}_+\otimes\mathsf{v}_-$, $\mathsf{v}_-\otimes\mathsf{v}_-$, матрица оператора перестановки имеет вид

$$\mathsf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Если бы матричные элементы $\mathcal{T}$ коммутировали с матричными элементами $\mathcal{T}'$, мы бы имели $\mathsf{P}(\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}') = (\mathcal{T}'\otimes\mathcal{T})\,\mathsf{P}$, т.е. в этом простейшем случае, когда следы заведомо коммутируют, $\mathsf{M}=\mathsf{P}$. В общем случае будем искать матрицу M в виде $\mathsf{M}=\mathsf{P}\mathsf{R}''$, где R'' – некоторая другая матрица (смысл такого обозначения выясниться чуть ниже).

Поскольку "сплетающее" соотношение

$$\mathsf{P}\mathsf{R}''(\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}') = (\mathcal{T}'\otimes\mathcal{T})\mathsf{P}\mathsf{R}'' \tag{2}$$

будет для нас основным, полезно переписать его в несколько ином виде. Обозначим $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}\otimes\mathbb{I}$, $\mathcal{T}_2 = \mathbb{I}\otimes\mathcal{T}$, тогда $\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}' = \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2'$, а $\mathcal{T}'\otimes\mathcal{T} = \mathsf{P}\,\mathcal{T}_2'\mathcal{T}_1\,\mathsf{P}$. После этого, помножив обе части нашего соотношения слева на P, запишем его так:

$$\mathsf{R}''_{12}\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2' = \mathcal{T}_2'\mathcal{T}_1\mathsf{R}''_{12}$$

Индексы у R'' означают, что этот оператор действует в тензорном произведении первого и второго пространств.

Конструктивно матрицу R'' можно найти, наложив более сильное достаточное условие – чтобы такая матрица существовала для каждого R-матричного сомножителя, входящего в $\mathcal{T}$-матрицу, а именно,

$$\mathsf{P}\mathsf{R}''(\mathsf{R}\otimes\mathsf{R}') = (\mathsf{R}'\otimes\mathsf{R})\mathsf{P}\mathsf{R}''$$

или

$$\mathsf{R}''_{12}\mathsf{R}_{13}\mathsf{R}'_{23} = \mathsf{R}'_{23}\mathsf{R}_{13}\mathsf{R}''_{12}$$

Это уже уравнение, в котором обе части – числовые матрицы 8×8, и есть надежда, что его удастся разрешить. В индексной записи

$$\sum_{\mu\nu\lambda} R''{}^{\nu\mu}_{\beta\gamma} R'{}^{\lambda\beta'}_{\alpha\mu} R^{\alpha'\gamma'}_{\lambda\nu} = \sum_{\mu\nu\lambda} R^{\lambda\mu}_{\alpha\beta} R'{}^{\alpha'\nu}_{\lambda\gamma} R''{}^{\gamma'\beta'}_{\mu\nu} \tag{3}$$

(где использовано обозначение $R^{\alpha'}_{\alpha}(\beta,\beta') = R^{\alpha'\beta'}_{\alpha\beta}$). Кроме того, предположим, что матрицы R, R', R'' имеют одинаковую структуру и различаются только значениями параметров: (a,b,c) для R, (a',b',c') для R', (a'',b'',c'') для R''.

Условие (3) называется уравнением (или системой уравнений) Янга-Бакстера или уравнением треугольников. Его можно представить графически (рис. 4). Это система из 64 уравнений с 3 неизвестными (ненулевыми элементами матрицы R''). Наша задача – выяснить, при каком выборе матриц R, R' система имеет ненулевое решение.

Заметим, во-первых, что в силу свойства $R^{\alpha'\beta'}_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha+\beta \neq \alpha'+\beta'$ большое число уравнений обращаются в тождества $0 = 0$. Что-то ненулевое в обеих частях получается только при $\alpha+\beta+\gamma = \alpha'+\beta'+\gamma'$. В результате остается только 20 нетривиальных уравнений, которые сводятся к 10 с учетом симметрии относительно переворачивания всех спинов в R-матрице. Четыре из этих десяти уравнений удовлетворяются тождественно, а остальные образуют три пары эквивалентных уравнений. Таким образом, остаются только 3 нетривиальных уравнения. Они имеют вид

$$\begin{cases} ac'a'' = bc'b'' + ca'c'' \\ ab'c'' = cc'b'' + ba'c'' \\ cb'a'' = ca'b'' + bc'c'' \end{cases} \tag{4}$$

Рассмотрим их как систему однородных уравнений с неизвестными a'', b'', c''. Ненулевое решение существует, если определитель системы равен 0. Это требование эквивалентно условию

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{a'^2+b'^2-c'^2}{2a'b'}$$

Аналогично, рассмотрев эти уравнения как систему однородных уравнений с неизвестными a', b', c', получим

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{a''^2+b''^2-c''^2}{2a''b''}$$

Тем самым мы показали, что если величина

$$\Delta = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

одинакова для всех R-матриц R, R', R'', построенные по ним трансфер-матрицы коммутируют.

Для дальнейшего исключительно удобно ввести следующую параметризацию статвесов a, b, c:

$$\begin{cases} a = \rho \sinh(u+2\eta) \\ b = \rho \sinh u \\ c = \rho \sinh 2\eta \end{cases} \tag{5}$$

Тогда $\Delta = \cosh 2\eta$, и трансфер-матрицы коммутируют при различных значениях u, ρ (и одинаковом η). Коммутативность при различных ρ тривиальна, поскольку общий множитель просто выносится и ни на что не влияет. Удобно положить $\rho = 1$. Параметр u называется *спектральным параметром*, и R-матрица, а также все остальные введенные объекты обычно рассматриваются как функции параметра u: $\mathsf{R} = \mathsf{R}(u)$, $T = T(u)$ и т.д. При этом подразумевается, что u может меняться, а η фиксировано, тогда $[T(u), T(u')] = 0$.

Как связаны между собой спектральные параметры R-матриц, входящих в уравнение Янга-Бакстера? Подставив параметризацию (5) для каждой R-матрицы (с u, u', u'' и одинаковым η) в условия (4), получим

$$u = u' + u''$$

Уравнение Янга-Бакстера примет симметричный вид

$$\mathsf{R}_{12}(u_1 - u_2)\mathsf{R}_{13}(u_1 - u_3)\mathsf{R}_{23}(u_2 - u_3) = \mathsf{R}_{23}(u_2 - u_3)\mathsf{R}_{13}(u_1 - u_3)\mathsf{R}_{12}(u_1 - u_2)$$

(для данной параметризации оно является тождеством), а сплетаюшее соотношение (2)

$$\check{\mathsf{R}}(u-u')(\mathcal{T}(u)\otimes\mathcal{T}(u')) = (\mathcal{T}(u')\otimes\mathcal{T}(u))\check{\mathsf{R}}(u-u') \tag{6}$$

с матрицей

$$\check{\mathsf{R}}(u) = \mathsf{P}\mathsf{R}(u) = \begin{pmatrix} a(u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & b(u) & 0 \\ 0 & b(u) & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(u) \end{pmatrix}$$

Отметим, что $\mathsf{R}(0) = \sinh 2\eta\, \mathsf{P}$.

Сплетающее соотношение (6) играет основную роль в теории интегрируемых моделей статистической физики на двумерной решетке, а также интегрируемых моделей физики твердого тела и теории поля. С алгебраической точки зрения оно задает коммутационные соотношения между генераторами бесконечномерной алгебры (квантовой аффинной алгебры), порождаемой коэффициентами разложения матричных элементов матрицы $\mathcal{T}(u)$ по u. Уравнение Янга-Бакстера эквивалентно ассоциативности этой алгебры, а реализация сплетающего соотношения для 6-вершинной модели матрицами больцмановских весов означает выбор ее специального конечномерного представления. Процедура построения собственных векторов трансфер-матрицы с помощью алгебраических свойств введенных операторов называется алгебраическим анзацем Бете.

Алгебраический анзац Бете. Матричные элементы квантовой матрицы монодромии $\mathcal{T}(u)$ представляют собой некоторые операторы в пространстве $\mathcal{H} \cong (\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$. Поэлементное выписывание соотношений, содержащихся в (6), дает правила коммутации этих операторов. Ниже мы приведем только те соотношения, которые понадобятся в дальнейшем.

Во-первых, одноименные элементы коммутируют при различных значениях спектрального параметра: $[A(u), A(v)] = 0$, $[B(u), B(v)] = 0$, и т.д. Во-вторых, имеют место коммутационные соотношения

$$a(u-v)B(u)A(v) = cB(v)A(u) + b(u-v)A(v)B(u) \tag{7}$$

$$a(u-v)B(v)D(u) = cB(u)D(v) + b(u-v)D(u)B(v) \tag{8}$$

Рассмотрим опять вектор $\Omega_+ = \underbrace{\mathsf{v}_+\otimes\mathsf{v}_+\otimes\ldots\otimes\mathsf{v}_+}_{N}$. С помощью тех же соображений, что и в предыдущем параграфе, убеждаемся, что он является собственным, причем

$$A(u)\Omega_+ = a^N(u)\Omega_+, \quad D(u)\Omega_+ = b^N(u)\Omega_+, \quad C(u)\Omega_+ = 0$$

Вектор Ω_+ будем называть порождающим, поскольку все остальные собственные вектора трансфер-матрицы будут строиться многократным применением к нему операторов $B(u)$.

Теорема. *Векторы*

$$\Phi(u_1,\ldots,u_n)=\prod_{j=1}^{n}B(u_j)\,\Omega_+$$

являются собственными ($T(u)\Phi=\Lambda(u)\Phi$) при условии, что числа u_j удовлетворяют системе уравнений Бете

$$\frac{a^N(u_j)}{b^N(u_j)}=(-1)^{n-1}\prod_{k=1,\neq j}^{n}\frac{a(u_j-u_k)}{a(u_k-u_j)} \tag{9}$$

или

$$\left(\frac{\sinh(u_j+2\eta)}{\sinh u_j}\right)^N=\prod_{k=1,\neq j}^{n}\frac{\sinh(u_j-u_k+2\eta)}{\sinh(u_j-u_k-2\eta)}$$

причем собственное значение $\Lambda(u)=\Lambda(u;u_1,\ldots,u_n)$ дается формулой

$$\Lambda(u;u_1,\ldots,u_n)=a^N(u)\prod_{j=1}^{n}\frac{a(u_j-u)}{b(u_j-u)}+b^N(u)\prod_{j=1}^{n}\frac{a(u-u_j)}{b(u-u_j)}$$

или

$$\Lambda(u;u_1,\ldots,u_n)=\sinh^N(u+2\eta)\prod_{j=1}^{n}\frac{\sinh(u-u_j-2\eta)}{\sinh(u-u_j)}+\sinh^N u\prod_{j=1}^{n}\frac{\sinh(u-u_j+2\eta)}{\sinh(u-u_j)}$$

Доказательство. Перепишем нужные нам коммутационные соотношения (7), (8) в более удобном виде:

$$A(u)B(v)=\frac{a(v-u)}{b(v-u)}\,B(v)A(u)-\frac{c}{b(v-u)}\,B(u)A(v)$$

$$D(u)B(v)=\frac{a(u-v)}{b(u-v)}\,B(v)D(u)-\frac{c}{b(u-v)}\,B(u)D(v)$$

С помощью этих соотношений можно преобразовать выражение

$$(A(u)+D(u))\prod_{j=1}^{n}B(u_j)\,\Omega_+$$

пронося $A(u)$ и $D(u)$ через $B(u_j)$ направо до встречи с вектором Ω_+, который является для них собственным. При этом возникают 2^n слагаемых, которые собираются в выражения вида

$$\Lambda(u)\prod_{k=1}^{n}B(u_k)\,\Omega_+$$

и

$$\Lambda_j(u)\,B(u)\prod_{k=1,\neq j}^{n}B(u_k)\,\Omega_+$$

с некоторыми числовыми множителями $\Lambda(u)$ и $\Lambda_j(u)$. Первое из этих выражений получается, если при коммутации учитывать только первые слагаемые в правых частях коммутационных соотношений. Действительно, если на каком-то шаге воспользоваться вторым слагаемым, возникнет оператор $B(u)$, который потом исчезнуть уже не может. Таким образом, $\Lambda(u)$ дается выражением для собственного значения, приведенным выше. Однако, пока мы еще не можем сказать, что наш вектор собственный, поскольку имеются "плохие члены". Коэффициент $\Lambda_j(u)$ можно найти, пронеся сначала $A(u)+D(u)$ через $B(u_j)$ и пользуясь при этом вторыми слагаемыми, а потом, при дальнейшем проносе направо, пользоваться опять только первыми слагаемыми. В результате получается:

$$\Lambda_j(u) = -\frac{c}{b(u_j-u)}\left(a^N(u_j)\prod_{k=1,\neq j}^{n}\frac{a(u_k-u_j)}{b(u_k-u_j)} - b^N(u_j)\prod_{k=1,\neq j}^{n}\frac{a(u_j-u_k)}{b(u_j-u_k)}\right)$$

Для того чтобы все плохие члены исчезли, достаточно потребовать $\Lambda_j(u)=0$ при всех $j=1,\ldots,n$, что эквивалентно системе уравнений Бете.

Таким образом, задача свелась к решению уравнений Бете. При конечных N они, вообще говоря, не допускают аналитического решения. Однако, при $N,n\to\infty$ система уравнений Бете при определенных предположениях может быть преобразована в интегральное уравнение на функцию плотности распределения корней, которое оказывается возможным решить. Это дает аналитическое выражение для свободной энергии в термодинамическом пределе.

Список литературы

[1] Р.Бэкстер, *Точно решаемые модели в статистической механике*, М., Мир, 1985.

[2] А.Белавин, А.Кулаков, Р.Усманов, *Лекции по теоретической физике*, МЦНМО, М., 2001.

[3] Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддеев, *Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга*, УМН **34:5** (1979) 13-63.