

19.1. Разложите диффеоморфизмы

- 1) $(x, y) \mapsto (\sin y + \cos x, \cos y + \sin x)$ в окрестности точки $(0, 0)$ и
- 2) $(x, y, z) \mapsto (x \cos y \cos z, x \cos y \sin z, x \sin y)$ в окрестности точки $(1, 0, 0)$ в композицию простейших (т.е. меняющих только одну координату).

19.2. 1) Найдите ранг отображения $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto ((x + y^2)^2, (x + y^2)^3)$.

2) На каком-либо открытом множестве, где f имеет постоянный ранг 1, приведите f к виду $(x, y) \mapsto (x, 0)$ (т.е. укажите такие диффеоморфизмы φ и ψ , что $\varphi f \psi: (x, y) \mapsto (x, 0)$).

19.3. Приведите функцию $f(x, y) = \ln(1 - xy)$ в окрестности точки $(0, 0)$ к морсовскому виду (т.е. укажите квадратичную форму q , которой f эквивалентна в окрестности точки $(0, 0)$, и укажите такой диффеоморфизм φ , что $f = q \circ \varphi$).

19.4 (*зонтик Уитни*). Найдите критические точки отображения $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (xy, y, x^2)$, и нарисуйте его образ.