Математические основы естествознания

Статистическая физика

Задачи к экзамену

1. Кузнечик каждую секунду с равной вероятностью 1/3 прыгает либо вперед на 10 см, либо на столько же назад, либо остается на месте. Найти средний квадрат его смещения из начальной точки через минуту.

2. Взяв за основу статистические определения энтропии и температуры, показать, что при тепловом контакте тело с более высокой температурой отдает энергию, а с более низкой – получает.

3. Дана система N независимых частиц, энергия каждой из которых может принимать два значения: 0 и $\varepsilon > 0$. Пусть система изолирована и ее полная энергия равна E. Считая, что N велико, и $E \gg \varepsilon$, найти энтропию и температуру системы как функции E.

4. Какая доля молекул газа, находящегося в обычных условиях, имела бы согласно классическому распределению Максвелла скорости, большие скорости света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с (дать оценку сверху)? Массу молекулы считать равной $5 \cdot 10^{-26}$ кг, температура в энергетических единицах $T = 3 \cdot 10^{-21}$ Дж (что приблизительно соответствует комнатной температуре).

5. Доказать, что дисперсия числа частиц в большом каноническом ансамбле с температурой T дается формулой

   $$D(N) = T^2 \, \frac{\partial^2 \log \mathcal{Z}}{\partial \mu^2}$$

   где $\mathcal{Z}$ – большая статистическая сумма, а μ – химический потенциал.

6. Найти среднюю энергию классического ангармонического осциллятора с гамильтонианом

   $$H = \frac{1}{2}(p^2 + \gamma^2 q^4)$$

   при температуре T.

7. Рассмотрим систему N магнитных моментов σ_i, каждый из которых может принимать два значения: $\sigma_i = \pm 1$. Энергия конфигурации $\{\sigma_i\}$ равна

   $$E(\{\sigma_i\}) = -J \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \sigma_{i+1} - H \sum_{i=1}^{N} \sigma_i$$

   (наложено периодическое граничное условие $\sigma_{N+1} = \sigma_1$). В предположении, что система находится в контакте с термостатом при температуре T, найти:

   а) среднее $\langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle$ в пределе $N \to \infty$ при $H = 0$,

   б) вероятность того, что $\sigma_1 = 1$.

8. Рассмотрим 6-вершинную модель с периодическими граничными условиями и матрицей локальных больцмановских весов (R-матрицей)

$$\mathsf{R} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

в базисе $\mathsf{v}_+ \otimes \mathsf{v}_+$, $\mathsf{v}_- \otimes \mathsf{v}_+$, $\mathsf{v}_+ \otimes \mathsf{v}_-$, $\mathsf{v}_- \otimes \mathsf{v}_-$, где $\mathsf{v}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{v}_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – базис в $\mathbb{C}^2$. Трансфер-матрица на двух узлах определяется как $T = \mathrm{tr}_{V_0}\Big(\mathsf{R}_{01}\mathsf{R}_{02}\Big)$, где R_{ij} действует нетривиально в $V_i \otimes V_j$, $V_i \cong \mathbb{C}^2$. Найти собственные значения и собственные векторы этой трансфер-матрицы.