Тензорные произведения

Правила игры. Для получения максимальной оценки за листок достаточно решить 75% задач.

♢ **13.1.** Пусть M — A-модуль, I — идеал в A. Докажите, что $M \otimes_A A/I \cong M/IM$.

♢ **13.2.** Пусть $m, n \in \mathbb{Z}$. Вычислите $\mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Z}_m$.

♢ **13.3.** Пусть I — идеал в A. **а)** Докажите, что $A/I \otimes_A A/I \cong A/I$.

б) Докажите, что $I \otimes A/I \cong I/I^2$. (Напомним, что I^2 — это идеал в A, порождённый всеми элементами вида xy, где $x, y \in I$.)

♢ **13.4 (Замена базы).** Пусть $f\colon A \to B$ — гомоморфизм колец. Определим умножение элементов кольца B на элементы кольца A по формуле $a \cdot b = f(a)b$ ($a \in A$, $b \in B$, умножение в правой части равенства выполняется в кольце B).

а) Докажите, что относительно этого умножения B является модулем над A.

б) Пусть M — модуль над A. Докажите, что A-модуль $B \otimes_A M$ является модулем над B относительно умножения $b \cdot (u \otimes v) = (bu) \otimes v$, где $b \in B$, $u \in B$, $v \in M$.

в) Докажите, что если M свободен над A, то $B \otimes_A M$ — свободный модуль того же ранга над B.

♢ **13.5. а)** Пусть $f\colon M \to P$, $h\colon N \to Q$ — гомоморфизмы A-модулей. Докажите, что отображение $f \otimes h\colon M \otimes_A N \to P \otimes_A Q$, заданное формулой $(f \otimes h)(u \otimes v) = f(u) \otimes h(v)$, является гомоморфизмом A-модулей.

б) Пусть $A = K$ — поле, а все модули в предыдущем пункте — конечномерные векторные пространства над K. Пусть линейные отображения f и h в некоторых базисах задаются матрицами $\widehat{f} = A = (a_{ij})$ и $\widehat{h} = B = (b_{kl})$. Докажите, что в подходящем базисе (каком?) отображение $f \otimes h$ задается блочной матрицей, полученной из A заменой каждого элемента a_{ij} на матрицу $a_{ij}B$. А можно ли, наоборот, устраивать блочную матрицу из B, заменяя каждое b_{kl} на $b_{kl}A$?

♢ **13.6.** Пусть в условиях задачи ♢ 13.5а) $N = Q$, а отображение $h = \mathrm{Id}_N$ тождественно.

а) Докажите, что если отображение f сюръективно, то $f \otimes \mathrm{Id}_N$ тоже сюръективно.

б) Докажите, что если отображение f инъективно, то $f \otimes \mathrm{Id}_N$ не обязательно инъективно.

в) Докажите, что если кольцо A — поле, то из инъективности f следует инъективность $f \otimes \mathrm{Id}_N$.

♢ **13.7.** В этой задаче приводится пример того, когда тензорное произведение двух модулей без кручения над кольцом без делителей нуля содержит кручение. Пусть $A = K[x, y]$ — кольцо многочленов от двух переменных, и пусть $I = (x, y)$ — идеал многочленов без свободного члена.

а) Докажите, что I/I^2 — двумерное векторное пространство над K, базисом которого являются $x + I^2$ и $y + I^2$.

б) Докажите, что отображение $I \otimes_A I \to I/I^2 \otimes_A I/I^2$ сюръективно, а значит, тензоры $x \otimes y$ и $y \otimes x$ различны в $I \otimes_A I$.

в) Докажите, что тензор $x \otimes y - y \otimes x \in I \otimes_A I$ аннулируется умножением на $x \in A$ и $y \in A$.

♢ **13.8. а)** Рассмотрим n-кратное тензорное произведение A-модуля M на себя $M^{\otimes n} = M \otimes M \otimes \cdots \otimes M$ и зафиксируем перестановку $\sigma \in S_n$. Докажите, что отображение $\varphi_\sigma\colon u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \mapsto u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(n)}$ является изоморфизмом A-модуля $M^{\otimes n}$ на себя.

б) Докажите, что множество $\mathrm{Sym}^n M$ таких тензоров $t \in M^{\otimes n}$, что для любой $\sigma \in S_n$ верно, что $t = \varphi_\sigma(t)$, является подмодулем в $M^{\otimes n}$. Такие тензоры называются *симметрическими*.

в) Докажите, что множество $\mathrm{Alt}^n M$ таких тензоров $t \in M^{\otimes n}$, что для любой $\sigma \in S_n$ верно, что $t = \mathrm{sgn}(\sigma)\varphi_\sigma(t)$, является подмодулем в $M^{\otimes n}$. Такие тензоры называются *кососимметрическими*.

г) Пусть $A = K$ — поле нулевой характеристики. Докажите, что отображения $\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\varphi_\sigma$ и $\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\varphi_\sigma$ являются проекторами на $\operatorname{Sym}^n M$ и $\operatorname{Alt}^n M$ соответственно.

♢ **13.9.** Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем K нулевой характеристики.

а) Докажите, что при $n \geq 2$ $\operatorname{Sym}^n V \cap \operatorname{Alt}^n V = 0$. **б)** Докажите, что $V\otimes V = \operatorname{Sym}^2 V \oplus \operatorname{Alt}^2 V$.

в) Покажите, что $V^{\otimes 3} \neq \operatorname{Sym}^3 V \oplus \operatorname{Alt}^3 V$. Укажите явно тензор из $V^{\otimes 3}$, не лежащий в $\operatorname{Sym}^3 V \oplus \operatorname{Alt}^3 V$.

г) Вычислите $\dim \operatorname{Sym}^n V$ и $\dim \operatorname{Alt}^n V$, явно укажите базисы этих пространств.

♢ **13.10.** Пусть U и V — конечномерные векторные пространства над полем K, U^* — двойственное к U пространство.

а) Докажите, что отображение $U^*\otimes V \to \operatorname{Hom}(U, V)$, определённое на разложимых тензорах по правилу: тензору $\xi\otimes v$ соответствует линейное отображение $u \mapsto \xi(u)\cdot v$, является изоморфизмом векторных пространств.

б) Пусть $U = V$. Докажите, что отображение $\operatorname{tr} : V^*\otimes V \to K$, $\xi\otimes v \mapsto \xi(v)$, является линейным функционалом на пространстве $V^*\otimes V$. Докажите, что $\operatorname{tr}(\omega)$ есть след оператора, сопоставленного тензору ω в предыдущем пункте.

♢ **13.11.** Пусть V — n-мерное векторное пространство над полем K. Рассмотрим тензорную алгебру $TV = \bigoplus_{k=0}^{\infty} V^{\otimes n}$, где по определению $V^{\otimes 0} = K$.

а) Докажите, что TV относительно операции тензорного произведения является ассоциативной некоммутативной алгеброй с единицей.

б) Докажите, что подпространства $\operatorname{Sym} V = \bigoplus_{k=0}^{\infty}\operatorname{Sym}^k V$ и $\operatorname{Alt} V = \bigoplus_{k=0}^{\infty}\operatorname{Alt}^k V$ не являются подалгебрами в TV.

♢ **13.12.** Цель этой задачи — дать “исправленное” определение симметрических и кососимметрических тензоров, чтобы на них можно было бы ввести структуру алгебры. Для этого сначала дадим определение факторкольца в некоммутативной ситуации.

а) Пусть R — некоммутативное кольцо. Подгруппа по сложению I называется двусторонним идеалом, если $\forall r \in R, x \in I$ верно, что $rx \in I$ и $xr \in I$. Дайте определение факторкольца R/I по двустороннему идеалу и докажите, что оно является кольцом.

б) Пусть $S \subset R$ — произвольное подмножество. Опишите наименьший двусторонний идеал, содержащий S (он называется идеалом, порождённым множеством S).

в) Обозначим через I_{Sym} идеал в TV, порождённый всеми тензорами вида $x\otimes y - y\otimes x$, где $x, y \in V$. Факторалгебра $SV = TV/I_{\mathrm{Sym}}$ называется *симметрической алгеброй* пространства V; умножение в ней обозначается точкой “$\cdot$”. Докажите, что эта алгебра коммутативна. Положим $S^n V = SV \cap V^{\otimes n}$; докажите, что $SV = \bigoplus S^n V$.

г) Пусть $\operatorname{char} K \neq 2$. Обозначим через I_{Alt} идеал в TV, порождённый всеми тензорами вида $x\otimes x$, где $x \in V$. Факторалгебра $\Lambda V = TV/I_{\mathrm{Alt}}$ называется *внешней алгеброй* пространства V; умножение в ней обозначается знаком “$\wedge$”. Положим $\Lambda^n V = \Lambda V \cap V^{\otimes n}$; докажите, что $\Lambda V = \bigoplus \Lambda^n V$.

д) Докажите, что $\operatorname{Sym}^n \cong S^n V$ и $\operatorname{Alt}^n V \cong \Lambda^n V$ *как векторные пространства.*

♢ **13.13 (Квадрика Плюккера). а)** Докажите, что алгебра ΛV *суперкоммутативна*: если $\omega_1 \in \Lambda^k V$ и $\omega_2 \in \Lambda^l V$, то $\omega_1\wedge\omega_2 = (-1)^{kl}\omega_2\wedge\omega_1$.

б) Кососимметрический тензор $\omega \in \Lambda^k V$ называется *разложимым*, если найдутся такие $v_1, \ldots, v_k \in V$, что $\omega = v_1\wedge\cdots\wedge v_k$. Докажите, что для всякого разложимого тензора $\omega\wedge\omega = 0$.

в) Вычислите $(u + v\wedge w)\wedge(u + v\wedge w)$, где $u, v, w \in V$ линейно независимы.

г) Докажите, что векторы $v_1, \ldots, v_k \in V$ линейно независимы тогда и только тогда, когда $\omega = v_1\wedge\cdots\wedge v_k \neq 0$.

д) Вычислите $\omega\wedge\omega$, где $\omega = \sum_{1\leq i,j\leq 4} p_{ij} e_i\wedge e_j$, векторы e_1, e_2, e_3, e_4 линейно независимы.

е) Докажите, что если $\dim V = 4$, то $\omega \in \Lambda^2 V$ разложим тогда и только тогда, когда $\omega\wedge\omega = 0$.

ж) Выведите отсюда, что множество двумерных плоскостей в V является квадрикой в $\mathbb{P}^5$.