Эрмитовы формы

Правила игры. Для получения максимальной оценки за листок достаточно решить 75% задач.

В этом листке все линейные пространства предполагаются определенными над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ и конечномерными.

$\diamondsuit$ **14.1.** Дайте определение матрицы полуторалинейной формы f на конечномерном линейном пространстве V над $\mathbb{C}$ в данном базисе. Докажите, что при переходе к новому базису с матрицей перехода C матрица формы преобразуется по закону $\hat{f}_{new} = C^T \hat{f}_{old} \overline{C}$.

$\diamondsuit$ **14.2.** Докажите, что всякую полуторалинейную форму $f(u, v)$ ранга 1 на V можно представить в виде $f(u, v) = \varphi(u)\psi(\overline{v})$, где $\varphi, \psi \in V^*$.

$\diamondsuit$ **14.3.** **а)** Пусть p — невырожденная полуторалинейная форма на V. Докажите, что $\forall\ \varphi \in V^*$ $\exists\ v_\varphi \in V$, так что $\forall\ u \in V\ \ \varphi(u) = p(u, v_\varphi)$.

б) Докажите, что сопоставление $\varphi \mapsto v_\varphi$ задает полулинейное взаимно-однозначное соответствие между V^* и V. (Отображение комплексных линейных пространств $\varphi\colon U \to W$ называется *полулинейным*, если $\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$ и $\varphi(\lambda u) = \overline{\lambda}\varphi(u)$.)

$\diamondsuit$ **14.4.** **а)** Пусть V — n-мерное линейное пространство над $\mathbb{C}$. Обозначим через $V_\mathbb{R}$ то же самое пространство, но рассматриваемое как линейное пространство над $\mathbb{R}$. Докажите, что $V_\mathbb{R}$ имеет размерность $2n$ над $\mathbb{R}$.

б) Пусть f — эрмитова форма на V. Докажите, что $\operatorname{Re} f(u, v)$ и $\operatorname{Im} f(u, v)$ являются, соответственно, симметрической и кососимметрической билинейными формами на $V_\mathbb{R}$.

в) Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис пространства V, а $A = \operatorname{Re} \hat{f}$ и $B = \operatorname{Im} \hat{f}$ соответственно вещественная и мнимая части матрицы формы f в этом базисе. Найдите матрицы форм $\operatorname{Re} f(u, v)$ и $\operatorname{Im} f(u, v)$ на $V_\mathbb{R}$ в базисе $e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n$ (докажите, что это базис пространства $V_\mathbb{R}$!).

г) Докажите, что положительность эрмитовой формы f равносильна положительности билинейной формы $\operatorname{Re} f(u, v)$ на $V_\mathbb{R}$.

$\diamondsuit$ **14.5.** **а)** Пусть W — n-мерное линейное пространство над $\mathbb{R}$ с симметричной билинейной формой $b(u, v)$. Рассмотрим его комплексификацию $W_\mathbb{C} = \mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} W$ и отождествим W с подмножеством тензоров $1 \otimes u$, $u \in W$. Докажите, что W является n-мерным подпространство вещественного $2n$-мерного *вещественного* пространства $\mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} W$, но *не является* комплексным подпространством в $W_\mathbb{C}$.

б) Пусть на W задана симметричная билинейная форма $b(u, v)$. Докажите, что форма $p_b(\alpha \otimes u, \beta \otimes v) = \alpha\overline{\beta} b(u, v)$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, является эрмитовой формой на $W_\mathbb{C}$, причем матрица билинейной формы b в базисе $e_1, \ldots, e_n$ пространства W совпадает с матрицей эрмитовой формы p_b в базисе $1 \otimes e_1, \ldots, 1 \otimes e_n$ пространства $W_\mathbb{C}$. Докажите, что если форма b положительна на W, то p_b положительна на $W_\mathbb{C}$.

в) Пусть p — произвольная эрмитова форма на $W_\mathbb{C}$. Докажите, что $b_p(u, v) = \operatorname{Re} p(1 \otimes u, 1 \otimes v)$ является симметрической билинейной формой на W. Докажите, что если эрмитова форма p положительна на $W_\mathbb{C}$, то билинейная форма b положительна на W.

г) Верно ли, что если билинейная форма b положительна на W, то эрмитова форма p положительна на $W_\mathbb{C}$?

$\diamondsuit$ **14.6.** Пусть U — векторное подпространство в V над $\mathbb{C}$, (u, v) — эрмитово скалярное произведение на V. Докажите, что множество

$$U^\perp = \{v \in V, \quad (u, v) = 0 \quad \forall\ u \in U\}$$

является векторным подпространством в V, причем если скалярное произведение положительно, то $V = U \oplus U^\perp$.

$\diamondsuit$ **14.7. а)** Пусть U — линейное подпространство в V над $\mathbb{C}$, (u,v) — положительное эрмитово скалярное произведение на V. Пусть в U имеется ортонормированный базис $e_1,\ldots,e_k$, $v\in V$, $v\notin U$. Докажите, что существует единственное разложение $v=u+w$, так что $u\in U$, $w\in U^{\perp}$. Найдите разложение $u\in U$ по базису $e_1,\ldots,e_k$.

б) Докажите, что процесс ортогонализации Грама–Шмидта позволяет построить по любому базису $g_1,\ldots,g_n$ такой ортонормированный базис $e_1,\ldots,e_n$, матрица перехода к которому является верхнетреугольной.

$\diamondsuit$ **14.8. а)** Пусть f — линейный оператор на V. Докажите, что функции от двух аргументов $u,v\in V$, определенные равенствами $p_f(u,v)=(f(u),v)$ и $q_f(u,v)=(u,f(v))$, являются полуторалинейными формами на V.

б) Докажите, что сопоставления $f\mapsto p_f$ и $f\mapsto q_f$ являются взаимно-однозначными соответствиями между множеством $\mathscr{L}$ линейных операторов на V и множеством $\mathscr{P}$ полуторалинейных форм на V. Докажите, что $\mathscr{L}$ и $\mathscr{P}$ являются комплексными линейными пространствами.

в) Докажите, что сопоставление $f\mapsto p_f$ является линейным отображением $\mathscr{L}$ на $\mathscr{P}$, а сопоставление $f\mapsto p_f$ является полулинейным отображением $\mathscr{L}$ на $\mathscr{P}$. (Определение полулинейного отображения см. в задаче $\diamondsuit$ 14.3.)

г) Докажите, что сопоставление $f\mapsto f^*$ является взаимно-однозначным полулинейным отображением $\mathscr{L}$ на $\mathscr{L}$.

$\diamondsuit$ **14.9. а)** Докажите, что множество самосопряженных операторов и множество антисамосопряженных операторов являются линейными пространствами над полем действительных чисел $\mathbb{R}$.

б) Докажите, что f самосопряженный оператор $\Leftrightarrow$ if антисамосопряженный.

в) Докажите, что любой оператор f можно единственным образом представить в виде $f=g+ih$, где g и h — самосопряженные операторы.

$\diamondsuit$ **14.10.** Докажите, что оператор f самосопряжен тогда и только тогда, когда его матрица в ортонормированном базисе представляется в виде $\hat{f}=A+iB$, где матрицы A и B вещественны, причем матрица A симметрична, а B кососимметрична.

$\diamondsuit$ **14.11.** Докажите, что у любого самосопряженного оператора существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов, причем все собственные значения вещественны.

$\diamondsuit$ **14.12.** Самосопряженный оператор f называется *положительным*, если эрмитова форма $p_f(u,v)$ положительна. Докажите, что f положителен тогда и только тогда, когда все его собственные значения положительны.

$\diamondsuit$ **14.13.** Докажите, что из любого положительного самосопряженного оператора f можно однозначно извлечь положительный корень любой натуральной степени n, т.е. существует единственный положительный самосопряженный оператор g такой, что $f=g^n$.

$\diamondsuit$ **14.14.** Пусть f — любой оператор. Докажите, что операторы ff^* и f^*f самосопряженные и положительные.

$\diamondsuit$ **14.15.** Пусть f и g — два коммутирующих оператора в конечномерном пространстве над $\mathbb{C}$. Докажите, что у них есть общий собственный вектор.

$\diamondsuit$ **14.16.** Докажите, что два самосопряженных оператора коммутируют тогда и только тогда, когда у них существует общий диагонализирующий ортонормированный базис.

$\diamondsuit$ **14.17.** Докажите, что матрица оператора f диагональна в некотором ортонормированном базисе тогда и только тогда, когда $ff^*=f^*f$. Такие операторы называются *нормальными.*

$\diamondsuit$ **14.18.** Пусть оператор f представлен в виде $f=g+ih$, где g и h самосопряженные операторы. Докажите, что f нормален тогда и только тогда, когда операторы g и h коммутируют, т.е. $hg=gh$.

$\diamondsuit$ **14.19. а)** Докажите, что унитарный оператор нормален.

б) Докажите, что все собственные значения унитарного оператора по модулю равны единице.

$\diamondsuit$ **14.20.** **а)** Докажите, что любой невырожденный оператор f можно единственным образом представить в виде $f = gh$ и $f = h'g'$, где операторы g и g' унитарны, а h и h' — положительные самосопряженные.

б) Докажите, что $g = g'$ и $h = h'$ тогда и только тогда, когда оператор f нормален.

$\diamondsuit$ **14.21.** Докажите, что любая унитарная матрица размера 2×2 с определителем 1 имеет вид $\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$, где $z, w \in \mathbb{C}$, $|z|^2 + |w|^2 = 1$.

$\diamondsuit$ **14.22.** **а)** Сколько существует целочисленных унитарных матриц 2×2? Докажите, что все такие матрицы образуют группу.

б) Можно ли эту группу представить в виде прямого произведения двух групп?