Задачи по группам и алгебрам Ли – 8

Задача без звездочки (со всеми пунктами) оценивается в 1 балл, задача со звездочкой – в 2 балла. Оценка за листок есть максимум из суммы баллов за задачи без звездочки и суммы баллов за задачи со звездочкой. Таким образом, для получения оценки 10 за листок надо решить либо все задачи без звездочки, либо все задачи со звездочкой.

1. Найдите скалярные квадраты элементов h_α относительно формы Киллинга для всех простых алгебр Ли, соответствующих двумерным системам корней.

2. Укажите какую-нибудь борелевскую подалгебру в алгебре Ли **а)** $\mathfrak{so}_4(\mathbb{C})$; **б)** $\mathfrak{so}_5(\mathbb{C})$.

3. Найдите все вещественные формы алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ с точностью до изоморфизма.

4. Докажите, что внешние степени тавтологического представления $\mathbb{C}^n$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ неприводимы, и являются фундаментальными представлениями этой алгебры Ли.

5. Докажите, что симметрические степени тавтологического представления $\mathbb{C}^n$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ неприводимы, и найдите их старшие веса.

6. Докажите, что внешний квадрат присоединенного представления компактной алгебры Ли размерности больше 3 приводим.

7. Найдите все неприводимые представления группы Ли SU_3 размерности не более 10 с точностью до изоморфизма.

8. Найдите все неприводимые представления группы Ли $SO_5(\mathbb{C})$ размерности не более 10 с точностью до изоморфизма.

9. Разложите в прямую сумму неприводимых и найдите старшие веса неприводимых компонент следующих представлений: **а)** тензорный квадрат $\mathbb{C}^3\otimes\mathbb{C}^3$ тавтологического представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ (или группы Ли SU_3). **б)** внешний квадрат $\Lambda^2(\mathfrak{sl}_3)$ присоединенного представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ (или группы Ли SU_3).

10. Разложите в прямую сумму неприводимых тензорный квадрат $\mathbb{C}^5\otimes\mathbb{C}^5$ тавтологического представления алгебры Ли $\mathfrak{so}_5(\mathbb{C})$ (или группы Ли $SO_5(\mathbb{R})$).

11*. *(Соотношения Серра)* Докажите, что в алгебре Ли $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ имеют место следующие соотношения между образующими e_i, h_i, f_i:

$$[h_i,h_j]=0,\ [e_i,f_j]=\delta_{ij}h_j,\ [h_i,e_j]=a_{ji}e_j,\ [h_i,f_j]=-a_{ji}f_j,\ \mathrm{ad}(e_i)^{1-a_{ji}}e_j=0,\ \mathrm{ad}(f_i)^{1-a_{ji}}f_j=0,$$

где a_{ij} – элементы матрицы Картана.

12*. Найдите ряд характер (как ряд Пуанкаре) алгебры Ли, построенной по матрице Картана $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Докажите, что эта алгебра Ли есть центральное расширение (бесконечномерной) алгебры $\mathfrak{sl}_2\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]$.

13*. Покажите, что система корней группы автоморфизмов алгебры октав в самом деле имеет тип G_2, а фундаментальными представлениями являются 14-мерное присоединенное и 7-мерное в пространстве чисто мнимых октав.

14*. Укажите какое-нибудь точное конечномерное представление универсальной накрывающей группы Ли $SO_n(\mathbb{R})$.

15*. Докажите, что представление полупростой комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве $\Lambda^\bullet\mathfrak{g}$ изоморфно прямой сумме нескольких копий $V_\rho\otimes V_\rho$.