

Программа экзамена по группам и алгебрам Ли

Экзамен будет проходить в форме письменной работы во вторник 19 июня с 10:00 до 14:00. Темы экзамена, ссылки на литературу и примеры задач даны ниже.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРИМЕРЫ ГРУПП ЛИ

Содержание. Гладкие действия групп Ли на многообразиях. Стабилизаторы и орбиты. Расслоения, происходящие из действий групп Ли на многообразиях, и связанные с ними точные гомотопические последовательности.

Литература. Э.Б. Винберг, А.Л. Онищик. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. Глава 1, пп. 1.1–1.10, 3.1, 3.4.

Примеры задач. 1. Докажите, что следующие подгруппы в $GL_n(\mathbb{R})$ являются подгруппами Ли, и найдите их размерности. **а)** Подгруппа матриц, сохраняющая тройку линейно независимых векторов; **б)** подгруппа матриц, перестановочных с проектором ранга 3; **в)** подгруппа матриц, сохраняющих пару несовпадающих прямых, проходящих через 0; **г)** подгруппа матриц, сохраняющих плоскость и не лежащую в ней прямую, проходящие через 0.

2. Найдите число связных компонент и фундаментальную группу группы Ли **а)** ортогональных вещественных матриц 4×4 -матриц, переводящих в себя данную плоскость, проходящую через 0; **б)** вещественных 4×4 -матриц, переводящих в себя данную прямую; **в)** комплексных 4×4 -матриц, переводящих в себя данную прямую; **г)** унитарных 4×4 -матриц, сохраняющих данное 3-мерное подпространство.

2. КАСАТЕЛЬНАЯ АЛГЕБРА ЛИ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

Содержание. Экспоненциальное отображение. Теорема существования и единственности гомоморфизма. Присоединенное представление. Универсальная накрывающая.

Литература. Э.Б. Винберг, А.Л. Онищик. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. Глава 1, пп. 2.1–2.10, 3.2–3.3.

Примеры задач. 1. Найдите все (с точностью до изоморфизма) связные группы Ли, касательная алгебра которых изоморфна **а)** $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$; **б)** $\mathfrak{su}_2 \oplus \mathfrak{su}_2$.

2. Приводимо ли присоединенное представление следующей группы Ли: **а)** $O_3(\mathbb{C})$; **б)** U_3 ; **в)** группа всех движений плоскости; **г)** группа всех аффинных преобразований плоскости?

3. ПРИМЕРЫ АЛГЕБР ЛИ И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Содержание. Алгебры Ли дифференцирований. Идеалы и факторалгебры. Представления алгебр Ли. Алгебры Ли малых размерностей. Представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Литература. Дж. Хамфрис. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. Глава 1, пп. 1.1–2.3.

W. Fulton, J. Harris. Representation theory: a first course. Part 2, lectures 10 and 11.

Э.Б. Винберг, А.Л. Онищик. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. Глава 1, п. 2.10.

Примеры задач. 1. Кососимметричная операция на трехмерном комплексном пространстве задана в базисе $\{x_1, x_2, x_3\}$ следующим образом: **а)**

$$[x_1, x_2] = 0, [x_1, x_3] = x_1 + x_2, [x_2, x_3] = -x_2;$$

б)

$$[x_1, x_2] = x_1 + x_2 + x_3, [x_1, x_3] = x_1 + x_2 + x_3, [x_2, x_3] = x_1 + x_2 + x_3.$$

в)

$$[x_1, x_2] = x_3, [x_1, x_3] = x_2, [x_2, x_3] = x_1.$$

Докажите, что эта операция удовлетворяет тождеству Якоби. Найдите все идеалы в этой алгебре Ли, найдите ее коммутант и центр.

2. Пусть V_n – $n+1$ -мерное неприводимое комплексное представление группы Ли $SL_2(\mathbb{C})$. Разложите в прямую сумму неприводимых представлений группы Ли $SL_2(\mathbb{C})$: **а)** $S^3(V_2)$; **б)** $\Lambda^3(V_4)$; **в)** $\Lambda^3(V_2 \oplus V_2)$.
3. Опишите все **а)** 6-мерные комплексные представления группы Ли $SO_3(\mathbb{C})$; **б)** 4-мерные комплексные представления группы Ли $SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C})$ с точностью до изоморфизма.

4. КОММУТАНТ И РАЗРЕШИМЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ.

Содержание. Коммутант как подгруппа Ли. Замыкание Мальцева и теорема существования виртуальных подгрупп Ли. Конструкция полупрямого произведения. Определение и примеры разрешимых и нильпотентных групп и алгебр Ли. Теорема Ли о представлениях разрешимой алгебры Ли.

Литература. Э.Б. Винберг, А.Л. Онищик. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. Глава 1, пп. 4.1 – 4.5.

Дж. Хамфрис. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. Глава 1, пп. 3.1–3.2.

Примеры задач. 1. **а)** Найдите все связные разрешимые подгруппы Ли в группе Ли U_2 ; **б)** Найдите все связные разрешимые комплексные подгруппы Ли в группе Ли $SL_2(\mathbb{C})$.

5. УНИВЕРСАЛЬНАЯ ОБЕРТЫВАЮЩАЯ АЛГЕБРА.

Содержание. Универсальная обертывающая алгебра – определение и примеры. Инвариантные дифференциальные операторы на группе Ли. Теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта.

Литература. Записки лекций 9-10 этого курса.

Семинар “Софус Ли”, глава 1.

Дж. Хамфрис. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений, глава 5, пп. 17.1–17.4.

Ж.-П. Серр. Алгебры Ли и группы Ли. Глава 3.

Примеры задач. 1. Найдите все элементы универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{sl}_2)$, коммутирующие **а)** с элементом e ; **б)** с элементом h .

2. Найдите все собственные значения элемента $e_{12}e_{21} \in U(\mathfrak{sl}_3)$ **а)** в тавтологическом представлении алгебры Ли \mathfrak{sl}_3 ; **б)** в двойственном к тавтологическому представлению алгебры Ли \mathfrak{sl}_3 ; **в)** присоединенном представлении алгебры Ли \mathfrak{sl}_3 .

6. КОМПАКТНЫЕ ГРУППЫ ЛИ.

Содержание. Инвариантные скалярные произведения, форма Киллинга. Инвариантное интегрирование. Полная приводимость представлений компактных групп Ли. Комплекс Шевалле и когомологии компактных групп Ли. Конечность фундаментальной группы полупростой компактной группы Ли.

Литература. Записки лекций 9-10 этого курса.

Дж.Адамс, Лекции по группам Ли, глава 3.

Д.Б.Фукс, Когомологии бесконечномерных алгебр Ли, глава 1, пп. 3.1, 3.3 и глава 2, п. 1.1.

Примеры задач. 1. Найдите ранг формы Киллинга **а)** двумерной неабелевой алгебры Ли; **б)** алгебры Гейзенберга; **в)** $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$.

2. Найдите сигнатуру формы Киллинга **а)** $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$; **б)** $\mathfrak{so}_4(\mathbb{R})$; **в)** $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$.

3. Опишите кольцо когомологий де Рама группы Ли **а)** U_2 ; **б)** $SO_4(\mathbb{R})$; **в)** $SL_2(\mathbb{C})$.

7. МАКСИМАЛЬНЫЕ ТОРЫ И СИСТЕМЫ КОРНЕЙ.

Содержание. Сопряженность максимальных торов. Решетка весов тора. Система корней. Отражения и группа Вейля.

Литература. Дж.Адамс, Лекции по группам Ли, глава 4.

Э.Б. Винберг, А.Л. Онищик. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. Глава 4, пп. 1.4 – 2.2.

Ж.-П. Серр. Алгебры Ли и группы Ли. Глава 5.

Примеры задач. 1. Найдите все максимальные торы группы Ли U_3 , содержащие диагональную матрицу с собственными значениями **а)** $1, -1, -1$; **б)** $1, \omega, \omega^2$, где ω – примитивный кубический корень из единицы.

2. Для каких корней группы $SO_5(\mathbb{R})$ соответствующий гомоморфизм $SU_2 \rightarrow SO_5(\mathbb{R})$ инъективен?

8. КЛАССИФИКАЦИЯ КОМПАКТНЫХ ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ.

Содержание. Группа Вейля свободно действует на камерах Вейля. Простые корни и диаграммы Дынкина. Задание полупростых комплексных алгебр Ли образующими и соотношениями. Компактная вещественная форма полупростой алгебры Ли.

Литература. Э.Б. Винберг, А.Л. Онищик. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. Глава 4, пп. 2.2 – 3.3 и Глава 5, п. 1.4.

Ж.-П. Серр. Алгебры Ли и группы Ли. Глава 6.

Примеры задач. 1. Найдите размерность алгебры Ли с образующими x_1, x_2 и соотношениями $\text{ad}(x_1)^2 x_2 = 0 = \text{ad}(x_2)^3 x_1$.

2. Опишите с точностью до изоморфизма все полупростые компактные группы размерности **а)** 6; **б)** 8.

9. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОМПАКТНЫХ ГРУПП ЛИ (ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ)

Содержание. Представления старшего веса. Модули Верма. Формула Вейля для характера и для размерности.

Литература. Э.Б. Винберг, А.Л. Онищик. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. Глава 4, п. 3.2.

Дж. Хамфрис. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений, глава 6.

Ж.-П. Серр. Алгебры Ли и группы Ли. Глава 7.

В.Г.Кац. Бесконечномерные алгебры Ли, глава 10.

Примеры задач. 1. Опишите с точностью до изоморфизма все комплексные представления **а)** группы Ли SU_3 размерности 10; **б)** группы Ли $SO_5(\mathbb{C})$ размерности 10.

2. Разложите в прямую сумму неприводимых тензорное произведение **а)** $V_{\omega_1} \otimes V_{\omega_2}$ группы Ли SU_3 ; **б)** тензорный квадрат присоединенного представления группы Ли $SL_3(\mathbb{C})$.

3. Найдите размерность неприводимого представления со старшим весом $\omega_1 + \omega_2$ группы Ли **а)** SU_3 ; **б)** SO_5 .