Задачи по группам и алгебрам Ли – 7

Задача без звездочки (со всеми пунктами) оценивается в 1 балл, задача со звездочкой – в 2 балла. Оценка за листок есть максимум из суммы баллов за задачи без звездочки и суммы баллов за задачи со звездочкой. Таким образом, для получения оценки 10 за листок надо решить либо все задачи без звездочки, либо все задачи со звездочкой.

1. Укажите явно нормализатор какого-нибудь максимального тора в группе $SO_3(\mathbb{R})$.

2. Укажите все корневые отображения SU_2 в группу Ли $SO_4(\mathbb{R})$ для какого-нибудь максимального тора.

3. Докажите, что для пропорциональных элементов системы корней коэффициент пропорциональности равен ± 1 или ± 2.

4. Докажите, что угол между корнями может принимать только значения, кратные $\frac{\pi}{4}$ или $\frac{\pi}{6}$.

5. Как соотносятся длины корней в каждом из случаев в предыдущей задаче?

6. Докажите, что в неразложимой приведенной системе корней длины корней могут принимать не более 2 различных значений.

7. Докажите, что группа Вейля неразложимой системы корней транзитивно действует на корнях данной длины.

8. Докажите, что всякая неразложимая приведенная система корней принадлежит одному из типов $A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$.

9. Докажите, что не существует односвязных компактных групп Ли размерностей $1, 2, 4, 5, 7$.

10. Докажите, что односвязные компактные группы Ли любой другой размерности – существуют.

11*. Докажите, что центр связной односвязной компактной группы Ли изоморфен факторгруппе решетки весов по решетке, порожденной корнями.

12*. Докажите, что стабилизатор в группе Вейля любого вектора пространства $\mathfrak{t}^*$ порожден некоторыми отражениями в корнях.

13*. Докажите, что все отражения в группе Вейля являются отражениями в корнях.

14*. Докажите, что если диаграмма Дынкина системы корней не имеет симметрий, то группа Вейля этой системы корней содержит оператор $-E$.

15*. а) Докажите, что группа Вейля типа B_n (или C_n) изоморфна полупрямому произведению группы $\mathbb{Z}_2^n$ на симметрическую группу S_n, действующую перестановкой сомножителей. **б)** Сформулируйте и докажите аналогичный факт для типа D_n.