

Программа коллоквиума

Это именно программа, а не список билетов. Чтобы жизнь была интереснее, распределение вопросов по билетам выяснится уже на коллоквиуме.

1. Модули над кольцами. Примеры. Подмодули, фактормодули. Гомоморфизмы модулей. Теорема о гомоморфизме.
2. Факториальные кольца. Лемма Гаусса. Теорема о том, что кольцо многочленов над факториальным кольцом факториально.
3. Кольца главных идеалов. Примеры. Условие обрыва цепочек идеалов. Китайская теорема об остатках.
4. Нётеровы кольца. Условие обрыва цепочек идеалов в нётеровых кольцах.
5. Факториальность колец главных идеалов. Линейное представление НОД. Равносильность простоты элемента $p \in A$ и целостности кольца $A/(p)$.
6. Конечнопорождённые модули. Свободные модули. Ранг модуля. Теорема о подмодуле свободного модуля над кольцами главных идеалов.
7. Теорема о взаимных базисах для модулей над кольцами главных идеалов.
8. Теорема о структуре конечнопорождённых модулей над кольцами главных идеалов: существование.
9. Подмодуль кручения. Представимость конечнопорождённого модуля над кольцом главных идеалов в виде прямой суммы свободного подмодуля и подмодуля кручения. Независимость ранга свободного слагаемого от выбора такого представления.
10. Подмодуль p -кручения. Представимость модуля кручения над кольцом главных идеалов в виде прямой суммы модулей p -кручения; однозначность такого представления.
11. Структура модуля p -кручения. Теорема о структуре конечнопорождённых модулей над кольцами главных идеалов: единственность.
12. Тензорное произведение модулей над кольцом. Универсальное свойство. Вычисление $\mathbb{Z}/(m) \otimes \mathbb{Z}/(n)$.
13. Тензорное произведение векторных пространств. Базис. $\text{Hom}(V, W) \cong V^* \otimes W$.
14. Тензорная алгебра векторного пространства. Свёртка. Полная и частичная свёртка тензора.
15. Симметрическая и внешняя алгебра векторного пространства. Размерность $S^n V$ и $\Lambda^n V$.
16. Полуторалинейные формы. Эрмитово скалярное произведение. Положительная определённость. Примеры эрмитовых скалярных произведений.
17. Комплексная структура на вещественном пространстве. Теорема о существовании и каноническом виде комплексной структуры.
18. Овеществление. Связь между линейными операторами на комплексном пространстве и его овеществлении.
19. Комплексификация. Связь между линейными операторами на вещественном пространстве и его комплексификации. Связь между положительно определёнными евклидовыми и эрмитовыми скалярными произведениями на этих пространствах.
20. Унитарные операторы, их собственные значения, диагонализуемость.
21. Эрмитовы операторы, их собственные значения, диагонализуемость.
22. Косоэрмитовы операторы, их собственные значения, диагонализуемость.
23. Нормальные операторы, диагонализуемость.
24. Полярное разложение.