1 Вводная лекция

2 Элементы статистической термодинамики

3 Модели статистической механики на решетке

4 Случайные матрицы

Случайные матрицы широко и плодотворно используются в различных областях физики и математики на протяжение более 60 лет, начиная с пионерских работ Вигнера и Дайсона. Первоначально введенная для описания статистики возбужденных уровней сложных ядер, теория случайных матриц выросла в отдельную большую область науки, применения которой оказываются гораздо шире и неожиданней, чем это первоначально предполагалось. В настоящее время теория случайных матриц – неотъемлемый элемент общей культуры специалистов по теоретической и математической физике.

Среди областей, к которым имеют отношение случайные матрицы, такие разнородные предметы, как квантовый хаос, статистическая механика на случайных графах, проблемы вязкой гидродинамики и модели роста, квантовая гравитация и теория струн, теория интегрируемых систем, теория чисел и другие. Как правило, интересным и содержательным является предел, когда размер матриц стремится к бесконечности.

Мы познакомимся с самыми простыми понятиями и утверждениями теории случайных матриц.

Будем рассматривать ансамбли эрмитовых матриц H ($H^\dagger = H$, $H_{ik} = \bar{H}_{ki}$) размера $N \times N$. Простейший ансамбль – гауссовский, в котором матрица H реализуется с плотностью вероятности

$$P(H) \propto e^{-\kappa \mathrm{tr}\, H^2}$$

Поскольку

$$\mathrm{tr}\, H^2 = \sum_{i,j} |H_{ij}|^2$$

этот закон распределения вероятностей означает, что мнимая и вещественная части каждого матричного элемента независимо распределены по Гауссу с одинаковой дисперсией. Статистическая сумма равна

$$Z_N = \int DH e^{-\kappa \mathrm{tr}\, H^2}$$

где

$$DH = \prod_{i=1}^{N} dH_{ii} \prod_{j<k} d\mathcal{R}eH_{jk}\, d\mathcal{I}mH_{jk} \tag{1}$$

мера (элемент объема) на пространстве эрмитовых матриц. Такую статсумму нетрудно вычислить явно – она представляет собой произведение N^2 одномерных гауссовых интегралов. Однако, как правило, интерес представляет не сама статсумма, а распределение и корреляции собственных значений, найти которые уже несколько сложнее.

4.1 Преобразование к собственным значениям

Эрмитова матрица H диагонализуется преобразованием подобия с помощью унитарной матрицы U ($UU^\dagger = 1$):

$$H = UXU^\dagger\,, \qquad X = \mathrm{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_N)$$

Матрица U содержит N^2 вещественных параметров, но определена с точностью до умножения справа на диагональную унитарную матрицу $U_{\mathrm{diag}} = \mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \ldots, e^{i\theta_N})$, в которой N вещественных параметров. Поэтому в дополнение к N собственным значениям остается $N^2 - N$ "угловых" параметров, которые мы обозначим u_{ab}, $a \neq b$. Эти величины являются некоторыми координатами на пространстве эрмитовых матриц.

Наша цель – совершить замену переменных $\{H_{ik}, H_{ii}\} \to \{u_{ab}, x_a\}$ и переписать в новых координатах элемент объема (1). Как известно, при этом

$$DH = |J| \prod_{a\neq b} du_{ab} \prod_a dx_a$$

где

$$J = \frac{\partial(H_{jk}, H_{ii})}{\partial(u_{ab}, x_a)}$$

якобиан преобразования, который и надо найти. Для этого запишем малую вариацию матрицы:

$$\delta H = \delta U X U^\dagger + U \delta X U^\dagger + U X \delta U^\dagger$$

и учтем, что в силу $UU^\dagger = 1$ имеем $\delta U^\dagger = -U^\dagger \delta U U^\dagger$. Тогда

$$U^\dagger \delta H U = U^\dagger \delta U X - X U^\dagger \delta U + \delta X$$

что можно переписать в матричных элементах как

$$\sum_{lm} U^\dagger_{il} U_{mk} \delta H_{lm} = (U^\dagger \delta U)_{ik}(x_k - x_i) + \delta X_{ik}$$

Теперь запишем это равенство для случаев, когда малые изменения матриц обусловлены малым изменением координат u_{ab} и x_a и учтем, что при этом по определению $\partial U/\partial x_a = \partial X/\partial u_{ab} = 0$, а также $\partial x_a/\partial x_b = \delta_{ab}$. Мы получим

$$\sum_{lm} W^{ik}_{lm} \frac{\partial H_{lm}}{\partial u_{ab}} = S^{ik}_{ab}(x_k - x_i)\,, \quad a \neq b$$

$$\sum_{lm} W^{ik}_{lm} \frac{\partial H_{lm}}{\partial x_a} = \delta_{ia}\delta_{ik}$$

где для краткости обозначено $W^{ik}_{lm} = U^\dagger_{il} U_{mk}$, $S^{ik}_{ab} = \left(U^\dagger \frac{\partial U}{\partial u_{ab}}\right)_{ik}$. Нам не важен явный вид этих матриц, а важно только то, что они зависят лишь от u_{ab} и не зависят от x_a.

Левая часть этих равенств имеет вид произведения матриц, строки и столбцы которых нумеруются мультииндексами (ik), (ab) (будем считать, что $u_{aa} = x_a$), причем одна из этих матриц – как раз матрица частных производных старых переменных но новым, определитель которой равен якобиану. Это произведение равно блочной матрице, которая стоит в правой части. В одном из блоков стоит S, в другом – единичная матрица. Взяв определители от обеих частей, и воспользовавшись тем, что зависимость определителя в правой части от x_a легко находится (строка с номером ik матрицы S умножена на число, равное $x_k - x_i$), получим

$$\det W(u)\, J = R(u) \prod_{i \neq k} (x_k - x_i)$$

Поэтому

$$|J| = A(u) \prod_{i<k} (x_i - x_k)^2$$

Мы видим, что мера факторизуется на множитель, зависящий только от "угловых" переменных и вычисляемый явно множитель, зависящий только от собственных значений.

На самом деле при выводе мы "забыли", что матричные элементы H_{jk} при $j \neq k$ комплексны, т.е. это не одна вещественная координата, а две. Но, как нетрудно убедиться, эта "ошибка" компенсируется тем, что одновременно мы рассматривали элементы H_{jk} и H_{kj} как независимые, так что конечный результат правильный.

Плотность вероятности распределения собственных значений в гауссовском ансамбле равна

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_N) dx_1 \ldots dx_N = \frac{1}{Z_N} \prod_{i<k} (x_i - x_k)^2 \Big(\prod_i e^{-\kappa x_i^2} dx_i \Big)$$

где

$$Z_N = C_N \int \prod_{i<k} (x_i - x_k)^2 e^{-\kappa \sum_i x_i^2} dx_1 \ldots dx_N$$

– статистическая сумма. Константа C_N имеет смысл объема унитарной группы, профакторизованной по подгруппе диагональных матриц. Если не оговорено противное, интегралы берутся от $-\infty$ до $+\infty$.

Более общим образом, можно рассматривать негауссовские ансамбли

$$Z_N = \int DH e^{-\mathrm{tr} V(H)} = C_N \int \prod_{i<k} (x_i - x_k)^2 e^{-\sum_i V(x_i)} dx_1 \ldots dx_N$$

с "потенциалом" V в виде полинома или ряда

$$V(x) = \sum_k t_k x^k$$

а также так называемые β-ансамбли

$$Z_N^{(\beta)} \propto \int \prod_{i<k} (x_i - x_k)^{2\beta} e^{-\sum_i V(x_i)} dx_1 \ldots dx_N$$

Как мы видели, при $\beta = 1$, это выражение дает статсумму для ансамбля эрмитовых матриц, выраженную как интеграл по собственным значениям. Есть еще два выделенных значения β, при которых данный интеграл имеет аналогичный смысл: $\beta = 1/2$ и $\beta = 2$. Первый случай соответствует вещественным симметричным матрицам, а второй – самодуальным кватернионно-вещественным матрицам. Аналогичная интерпретация для произвольных значений β неизвестна.

Большой интерес представляет вероятность того, что в интервале $[x, x + dx]$ содержится хотя бы одно собственное значение. Чтобы ее найти, надо совместную плотность вероятности проинтегрировать по положениям всех собственных значений кроме одного. Иными словами, рассмотрим

$$\rho(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta(x - x_i)$$

тогда упомянутая плотность вероятности есть $\langle \rho(x) \rangle$. Нормировка: $\int \langle \rho(x) \rangle \, dx = 1$. Для простоты будем называть эту величину плотностью собственных значений.

Со средней плотностью тесно связано среднее значение резольвенты случайной матрицы

$$G(z) = \frac{1}{N} \left\langle \mathrm{tr} \, \frac{1}{z - H} \right\rangle = \frac{1}{N} \left\langle \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{z - x_j} \right\rangle = \int \frac{\langle \rho(x) \rangle \, dx}{z - x}$$

Здесь $z \in \mathbb{C}$ – произвольный комплексный параметр. Тем самым $G(z)$ – аналитическая функция z в верхней и нижней полуплоскости со скачком на разрезе вдоль вещественной оси. Как следует из формулы Сохоцкого-Племеля, скачок на разрезе как раз пропорционален плотности:

$$G(x - i0) - G(x + i0) = 2\pi i \, \langle \rho(x) \rangle$$

4.2 Петлевое уравнение

Для удобства взятия $N \to \infty$ предела заменим $V(x) \to N/gV(x)$, где g – некоторый новый параметр, не зависящий от N, а про несущественную постоянную C_N забудем. Для большей общности будем работать с β-ансамблем. Статсумма имеет вид

$$Z_N^{(\beta)} = \int \prod_{i<k} (x_i - x_k)^{2\beta} e^{-N/g \sum_i V(x_i)} dx_1 \dots dx_N$$

Мы сейчас выведем некоторое точное соотношение, которое по историческим причинам называется петлевым уравнением. Оно следует из очевидного тождества

$$\sum_j \int \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{z - x_j} \prod_{i<k} (x_i - x_k)^{2\beta} e^{-N/g \sum_i V(x_i)} \right) dx_1 \dots dx_N = 0$$

которое имеет место, если $V(x)$ достаточно быстро возрастает при $x \to \pm\infty$ (на самом деле равен нулю каждый член суммы, а сумма взята для симметрии). После расписывания производной и представления получившихся членов как средних по ансамблю, получим соотношение

$$\left\langle \beta \left(\sum_i \frac{1}{z - x_i} \right)^2 + (1 - \beta) \sum_i \frac{1}{(z - x_i)^2} - \frac{N}{g} \sum_i \frac{V'(x_i)}{z - x_i} \right\rangle = 0$$

Обозначим

$$G^{(2)}(z) = \frac{1}{N^2}\left\langle\left(\sum_i \frac{1}{z-x_i}\right)^2\right\rangle$$

$$Q(z) = \frac{1}{N}\left\langle\sum_i \frac{V'(z)-V'(x_i)}{z-x_i}\right\rangle$$

тогда полученное соотношение перепишется в виде

$$\beta G^{(2)}(z) - g^{-1}V'(z)G(z) + g^{-1}Q(z) + \frac{\beta-1}{N}G'(z) = 0 \tag{2}$$

4.3 Полукруговой закон Вигнера

Найдем плотность собственных значений для гауссовского ансамбля в пределе большого N. Запишем статсумму в виде

$$Z_N = \int \prod_{i<k}(x_i-x_k)^2 e^{-N/g\sum_i x_i^2} dx_1 \dots dx_N = \int e^{-W} dx_1 \dots dx_N$$

где

$$W = -\sum_{i\neq j} \log|x_i - x_j| + \frac{N}{g}\sum_i x_i^2$$

В таком виде Z_N имеет смысл статсуммы газа заряженных частиц на прямой, взаимодействующих друг с другом посредством двумерного кулоновского потенциала и находящихся во внешнем квадратичном поле. Эта электростатическая аналогия, введенная впервые Дайсоном, оказывается чрезвычайно полезной.

Нестрогий, но простой вывод плотности собственных значений при больших N таков. В пределе $N \to \infty$ можно считать, что частицы распределены непрерывно с некоторой плотностью $\rho(x)$, тогда в главном порядке

$$W \cong -N^2 \int\int \rho(x)\log|x-x'|\rho(x')dxdx' + \frac{N^2}{g}\int \rho(x)x^2 dx$$

Оба члена имеют одинаковый порядок по N. В пределе $N \to \infty$ основной вклад в интеграл вносит минимум этого функционала по ρ при условии, что $\int \rho(x)dx = 1$. Вводя соответствующий множитель Лагранжа и варьируя по ρ, получим интегральное уравнение

$$-2\int_{-\infty}^{\infty} \log|x-x'|\rho(x')dx' + x^2/g = \lambda$$

или, беря производную по x,

$$\text{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(x')dx'}{x-x'} = x/g$$

где интеграл берется в смысле главного значения. Смысл этого уравнения в том, что каждая частица находится в равновесии – сила, действующая на нее со стороны других частиц (левая часть) и со стороны внешнего поля (правая часть) компенсируют друг друга. Отсюда видно, что мы не должны требовать справедливости этого уравнения на всей прямой, а должны только в тех областях, где есть частицы, т.е. там, где $\rho \neq 0$.

Решение имеет вид

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi g}\sqrt{2g - x^2}, & |x| < \sqrt{2g} \\ \\ 0, & |x| > \sqrt{2g} \end{cases}$$

что может быть проверено элементарным интегрированием. Это – знаменитый полукруговой закон Вигнера. Более строгое рассмотрение подтверждает это распределение. Поправки к нему также представляют интерес, но элементарными методами уже не вычисляются.

Такой же ответ получается и из петлевого уравнения (2). Действительно, при $V(z) = z^2$ $Q(z) = 2$, так что при $\beta = 1$ имеем

$$gG^{(2)}(z) - 2zG(z) + 2 = 0$$

В пределе $N \to \infty$ $G^{(2)}(z)$ можно заменить на $G^2(z)$, и на $G(z)$ получается квадратное уравнение, решение которого (такое, что $G(z) \to 1/z$ при $z \to \infty$) есть

$$G(z) = \frac{1}{g}(z - \sqrt{z^2 - 2g})$$

Скачок этой функции на разрезе дает тот же самый полукруговой закон Вигнера.

4.4 Матрица моментов

Рассмотрим статсумму матричной модели с потенциалом общего вида

$$Z_N = \int \prod_{i<k} (x_i - x_k)^2 e^{-\sum_i V(x_i)} dx_1 \dots dx_N$$

и введем так называемую матрицу моментов

$$C_{mn} = \int x^{m+n-2} e^{-V(x)} dx$$

Лемма. $Z_N = N! \det_{1 \le m,n \le N} C_{mn}$.

Доказательство. По определению детерминанта

$$N! \det C_{mn} = \sum_{Q,P} (-)^Q (-)^P C_{Q(1)P(1)} C_{Q(2)P(2)} \dots C_{Q(N)P(N)}$$

Подставляя сюда явный вид C_{mn}, запишем правую часть в виде

$$\sum_{Q,P} (-)^Q (-)^P \int \prod_i \left[x_i^{Q(i)+P(i)-2} e^{-V(x_i)} dx_i \right]$$

или, меняя порядок суммирования и интегрирования,

$$\int \left[\sum_Q (-)^Q \prod_i x_i^{Q(i)-1} \right] \left[\sum_P (-)^P \prod_j x_j^{P(j)-1} \right] \prod_k e^{-V(x_k)} dx_k$$

Выражение в квадратных скобках – определитель Вандермонда

$$\Delta_N(x_1, \dots, x_N) = \det_{1 \le i,k \le N}(x_i^{k-1}) = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$$

так что правая часть действительно равна Z_N.

4.5 Ортогональные полиномы

Важную роль играет среднее от характеристического полинома случайной матрицы. Для матрицы размера $n \times n$ имеем

$$P_n(\lambda) = \left\langle \det_{n\times n}(\lambda - H) \right\rangle = \left\langle \prod_{i=1}^{n}(\lambda - x_i) \right\rangle = \frac{1}{Z_n}\int \prod_{i<j}(x_i - x_j)^2 \prod_{k}^{n}(\lambda - x_k)e^{-V(x_k)}dx_k$$

Это полином степени n со старшим членом λ^n.

Теорема. *Полиномы $P_n(\lambda)$ ортогональны на вещественной оси с весом $e^{-V(x)}$:*

$$\int P_n(x)P_m(x)e^{-V(x)}dx = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n$$

Доказательство. Для краткости обозначим $e^{-V(x)}dx := d\mu(x)$. Достаточно показать, что

$$\int P_n(x)x^m d\mu(x) = 0$$

при всех $m < n$, т.е.

$$\int d\mu(x)x^m \int \Delta_n^2(x_1, \dots, x_n)\prod_k (x - x_k)d\mu(x_k) = 0\,, \quad m < n$$

Заметим, что

$$\Delta_n(x_1, \dots, x_n)\prod_{k=1}^{n}(x - x_k) = \Delta_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x)$$

Положив $x = x_{n+1}$, будем иметь для левой части:

$$\int \Delta_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1})\Delta_n(x_1, \dots, x_n)x_{n+1}^m \prod_{k=1}^{n+1} d\mu(x_k)$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{l=1}^{n+1}(-1)^{n+l+1}\int \Delta_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1})\Delta_n(x_1, \dots, \cancel{x_l}, \dots, x_n)x_l^m \prod_{k=1}^{n+1} d\mu(x_k)$$

Сумма представляет собой разложение определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^m \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} & x_2^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^m \end{vmatrix}$$

по последнему столбцу. Если $m < n$, этот определитель тождественно равен нулю.

Если же в предыдущем рассуждении взять $m = n$, написанный выше определитель равен Δ_{n+1}, и мы, очевидно, получим

$$\int P_n(x)x^n d\mu(x) == \int P_n^2(x)d\mu(x) = \frac{1}{n+1} Z_{n+1}/Z_n$$

Обозначим через h_n квадрат нормы полинома P_n, т.е.

$$\int P_n(x)P_m(x)d\mu(x) = h_n\delta_{mn}$$

тогда

$$h_n = \frac{1}{n+1}\frac{Z_{n+1}}{Z_n}$$

Эквивалентным образом, статсумма выражается через нормы ортогональных полиномов:

$$Z_N = N!\prod_{n=0}^{N-1} h_n$$

Список литературы

[1] М.Л.Мета, *Случайные матрицы*, Москва, МЦНМО, 2012.