

Глава 20

Задачи к экзаменам

20.1 1 семестр

1. Докажите, что ориентируемую поверхность рода g можно получить, склеивая попарно стороны данного многоугольника с $2n$ сторонами, в том и только в том случае, если $n \geq 2g$.
2. Пусть число $h-1$ делит число $g-1$, $h \geq 2$. Докажите, что в этом случае существует накрытие поверхности рода h поверхностью рода g .
3. Постройте в проективном пространстве гладкую рациональную кривую степени 4.
4. Докажите, что всякая кривая степени 3 в проективном пространстве, не лежащая ни в какой гиперплоскости, рациональна.
5. Докажите, что кривая степени 4 в проективном пространстве, не лежащая ни в какой гиперплоскости, является либо рациональной, либо кривой рода 1.
6. Найдите род кривой в проективном пространстве, являющейся гладким пересечением двух квадрик.
7. Найдите род кривой в проективном пространстве, являющейся гладким пересечением квадрики и кубики.
8. Приведите пример мероморфного дифференциала на эллиптической кривой, имеющего нуль второго порядка и два полюса первого порядка.
9. Нарисуйте кривую, двойственную к кривой $y = x^4 - x^2$, найдите ее уравнение и особые точки.

10. Окружность радиуса $1/3$ катится изнутри по окружности радиуса 1 . Найдите уравнение кривой (*гипоциклоиды, дельтоиды*), являющейся следом точки на меньшей окружности, род этой кривой, ее особенности и двойственную кривую.
11. Окружность радиуса $1/4$ катится изнутри по окружности радиуса 1 . Найдите уравнение кривой (*гипоциклоиды, астроиды*), являющейся следом точки на меньшей окружности, род этой кривой, ее особенности и двойственную кривую.
12. Докажите, что плоская кривая $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ рациональна и найдите ее рациональную параметризацию.
13. Докажите, что плоская кривая $(x - 1)(x^2 + y^2) = x^2$ рациональна и найдите ее рациональную параметризацию.
14. Докажите, что плоская кривая $x^4 + x^2y^2 + y^4 = x(x^2 + y^2)$ рациональна и найдите ее рациональную параметризацию.
15. Докажите, что плоская кривая $x^4 = x^3 - y^3$ рациональна и найдите ее рациональную параметризацию.
16. Найдите особые точки плоской кривой $(y^2 - x^2)(x - 1)(2x - 3) = 4(x^2 + y^2 - 2x)^2$, определите их тип и род кривой.
17. Рассмотрим на плоскости с координатами x, y кривую, состоящую из тех пар значений (x, y) , при которых многочлен $t^4 - t^2 + xt + y$ от переменной t имеет кратные корни. Найдите уравнение этой кривой, определите ее особые точки и двойственную к ней кривую.
18. Докажите, что неприводимая кривая, заданная уравнением $P_n(x, y) + P_{n-1}(x, y) = 0$, где P_n — ненулевой однородный многочлен степени n , а P_{n-1} — ненулевой однородный многочлен степени $n - 1$, допускает рациональную параметризацию.
19. Найдите группу автоморфизмов плоской кривой $y^2 = x^3 + x^2$.
20. При каких значениях параметра m кривая $x^3 + y^3 + z^3 = mxyz$ является гладкой? Найдите ее точки перегиба.

21. Пусть C — кривая в проективном пространстве. Рассмотрим проекцию кривой C из точки в пространство на единицу меньшей размерности. Докажите, что при проектировании из общей точки вне кривой проекция имеет ту же степень, что и C , а при проектировании из общей точки на кривой — на единицу меньшую степень.
22. Докажите, что всякая кривая рода 2 допускает погружение в проективную плоскость с одной простой двойной точкой.
23. Пусть эллиптическая кривая реализуется как разветвленное накрытие степени 2 над проективной прямой с точками ветвления $-1, 0, 1, \infty$. Найдите группу автоморфизмов этой эллиптической кривой.
24. Пусть f — многочлен степени n с n попарно различными корнями a_1, \dots, a_n . Докажите, что

$$\frac{1}{f'(a_1)} + \frac{1}{f'(a_2)} + \dots + \frac{1}{f'(a_n)} = 0.$$

25. Пусть X — компактная алгебраическая кривая рода 5, Y — компактная алгебраическая кривая рода 4. Докажите, что всякое голоморфное отображение $f: X \rightarrow Y$ является отображением в точку.
26. Пусть X — компактная алгебраическая кривая рода 2, Y — компактная алгебраическая кривая рода 1 и $f: X \rightarrow Y$ — непостоянное голоморфное отображение. Докажите, что на поверхности X может быть не более двух точек ветвления отображения f . Может ли точка ветвления на X быть единственной?
27. Пусть плоская алгебраическая кривая задана в аффинной карте уравнением $w^4 = z^3 - 3z$. Найдите ее род. Найдите полюса и вычеты 1-формы dz/w на этой кривой. Постройте явно базис в пространстве голоморфных 1-форм на ней.
28. Рассмотрим алгебраическую кривую

$$X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid z^2 + zw + w^2 = 3\}$$

и точку $p = (1, 1) \in X$. Найдите вычет 1-формы $dz/(w^2 - 1)$ в точке $p \in X$.

29. Докажите, что не существует кривой Гурвица рода $g = 2$.
30. Докажите, что группа сохраняющих ориентацию симметрий икосаэдра изоморфна $\mathrm{PSL}(2, 5)$.
31. Укажите полюса, их порядки и вычеты для 1-формы, являющейся поднятием на кривую $y^2 = x^3 - x$ 1-формы dx относительно проектирования кривой на ось x .

32. Найдите полюса и вычеты в них у мероморфной 1-формы $\frac{x^3 dx}{x^2-1}$. Какова их область определения (опишите компактную гладкую риманову поверхность, на которой она задана)?
33. Найдите полюса и вычеты в них у мероморфной 1-формы $\frac{x^4 dx}{x^2-1}$. Какова их область определения (опишите компактную гладкую риманову поверхность, на которой она задана)?
34. Найдите полюса и вычеты в них у ограничения мероморфной 1-формы dx на кривую $x^3 + y^3 + xy = 1$.
35. Найдите полюса и вычеты в них у ограничения мероморфной 1-формы dx на кривую $x^3 + y^3 + xy = 0$.
36. Найдите полюса и вычеты в них у ограничения мероморфной 1-формы $\frac{dx}{y}$ на кривую $x^3 + y^3 + xy = 1$.
37. Найдите полюса и вычеты в них у ограничения мероморфной 1-формы $\frac{dx}{y}$ на кривую $x^3 + y^3 + xy = 0$.
38. Найдите полюса и вычеты в них у ограничения мероморфной 1-формы $\frac{dx}{y^2}$ на кривую $x^3 + y^3 + xy = 1$.
39. Найдите полюса и вычеты в них у ограничения мероморфной 1-формы $\frac{dx}{y^2}$ на кривую $x^3 + y^3 + xy = 0$.
40. Определите особые точки (замыкания) следующих плоских кривых и определите род нормализации. В случае, если род равен 0, предъявите рациональную параметризацию. В случае, если род равен 1, постройте какую-нибудь мероморфную функцию степени 2, вычислите ее критические значения, их двойное отношение и значение j -инварианта: $x^3 + y^3 + xy = 1$, $y^2 - x^4 = xy^3$, $y^2 = x^4 + x^2$, $y^2 = x^5 + x^2$.
41. Опишите все возможные кривые рода 1, на которых существует мероморфная функция степени 3 с ровно тремя критическими значениями.

20.2 Вопросы к экзамену

1. Склейка двумерных поверхностей из многоугольников
2. Накрытия и разветвленные накрытия двумерных поверхностей. Построение разветвленного накрытия по монодромии.
3. Формула Римана–Гурвица
4. Теорема Безу и ее приложения
5. Рациональная параметризация плоских кривых
6. Род гладкой плоской кривой. Род нормализации плоской кривой с простыми самопересечениями
7. Гессиан и точки перегиба
8. Гиперэллиптические кривые. Род гиперэллиптической кривой
9. Теорема Уитни о вложениях и погружениях кривых
10. Мероморфные функции на кривых в проективных пространствах
11. Проективная двойственность для кривых
12. Формулы Пюккера для неособых кривых
13. Формулы Пюккера для кривых с особенностями
14. Автоморфизмы сферы Римана. Конечные группы автоморфизмов
15. Эллиптические кривые. Отображения эллиптических кривых
16. Модули эллиптических кривых
17. Кубики как эллиптические кривые
18. j -инвариант кубических кривых
19. Автоморфизмы кривых. Теорема Гурвица
20. Касательное и кокасательное расслоения. Дифференциальные 1-формы на кривых
21. Размерность пространства голоморфных 1-форм на плоской гладкой кривой
22. Интегрирование 1-форм. Точные 1-формы
23. Размерность пространства голоморфных 1-форм на кривой с простыми самопересечениями
24. Вычеты и интегралы от мероморфных 1-форм

20.3 2 семестр

1. Докажите, что для любых двух точек на эллиптической кривой существует мероморфная функция степени 2, имеющая в этих точках полюса первого порядка. Выразите эту функцию через функцию Вейерштрасса.
2. Докажите, что если для двух точек x_1, x_2 на кривой C существует функция с полюсами первого порядка в этих точках и без других полюсов, то каноническое отображение кривой C переводит эти две точки в одну.
3. Докажите, что образ гиперэллиптической кривой любого рода при каноническом отображении — рациональная кривая.
4. Всякая мероморфная функция степени 2 на комплексной кривой определяет на этой кривой инволюцию — автоморфизм второго порядка, переставляющий прообразы каждой точки из $\mathbb{C}P^1$. Неподвижные точки этой инволюции — критические точки функции. Найдите размерность пространства $L(D)$ мероморфных функций на гиперэллиптической кривой рода $g \geq 2$ для случаев а) $D = 2x$, где x — неподвижная точка инволюции; б) $D = 2x$, где x не является неподвижной точкой инволюции; в) $D = x_1 + x_2$, где точки x_1, x_2 образуют орбиту инволюции; г) $D = x_1 + x_2$, где точки x_1, x_2 не образуют орбиту инволюции.
5. Докажите, что всякая негиперэллиптическая кривая рода 5 биголоморфна пересечению трех квадрик в $\mathbb{C}P^4$.
6. Докажите, что всякая кривая рода два допускает погружение в проективную плоскость в качестве кривой степени 4 с одной простой двойной точкой.
7. Докажите теорему Клиффорда: если кривая C негиперэллиптическая, то для любой точки $x \in C$ имеет место неравенство $l(kx) < \frac{k}{2} + 1$ при $k = 1, \dots, 2g - 1$.
8. Найдите все точки Вейерштрасса на плоской кривой Ферма $x^4 + y^4 = 1$ и укажите их тип. Пользуясь этим результатом, найдите группу автоморфизмов плоской кривой Ферма $x^4 + y^4 = 1$.
9. Найдите многочлен Гильберта объединения прямой и точки на плоскости.
10. Найдите многочлен Гильберта объединения прямой и трансверсально пересекающей ее гладкой квадрики на плоскости.
11. Найдите многочлен Гильберта объединения прямой и касающейся ее гладкой квадрики на плоскости.

12. Найдите многочлен Гильберта скрученной кубики в проективном пространстве.
13. Найдите многочлен Гильберта пары пересекающихся прямых в проективном пространстве.
14. Найдите многочлен Гильберта пары скрещивающихся прямых в проективном пространстве.
15. Найдите размерность N проективного пространства голоморфных сечений третьей степени канонического расслоения на кривой рода g .
16. Приведите пример кривой рода $g = 2$, на которой 2-каноническое отображение φ_{2K} , отвечающее тензорному квадрату кокасательного расслоения, не задает вложения.
17. Проверьте, что многочлен Гильберта 3-канонической кривой равен

$$p_g(n) = 3(2g - 2)n - g + 1$$

и докажите, что любая гладкая кривая с таким многочленом Гильберта в $\mathbb{C}\mathbb{P}^{5g-6}$ является 3-канонической кривой рода g .

18. Найдите многочлен Гильберта кривой Веронезе в $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-2}$. Докажите, что особые кривые Веронезе имеют тот же многочлен Гильберта. Проверьте, что всякая кривая (на самом деле, всякое подмногообразие) с тем же многочленом Гильберта является стабильной кривой Веронезе.
19. Нарисуйте модулярные графы всех стабильных кривых рода 2 и 3 без отмеченных точек.
20. Нарисуйте модулярные графы всех стабильных кривых рода 2 с одной отмеченной точкой.
21. Нарисуйте модулярные графы всех стабильных кривых рода 1 с тремя отмеченными точками.
22. Верно ли, что порядок группы автоморфизмов стабильной кривой рода g не может превышать $84(g - 1)$?
23. Как выглядит стабильный предел однопараметрического семейства кривых рода $g + 1$, $g \geq 1$, полученных из данной гладкой кривой C рода g склейкой постоянной точки p с переменной точкой q при стремлении точки q к точке p ?
24. Сформулируйте и докажите формулу Римана–Роха для стабильных кривых.
25. Докажите, что 5-каноническое отображение стабильной кривой рода $g \geq 2$ без отмеченных точек является вложением.

26. Вычислите эйлерову характеристику пространства $\overline{\mathcal{M}}_{1;2}$.
27. Вычислите эйлерову характеристику пространства $\overline{\mathcal{M}}_{2;0}$.
28. Вычислите эйлерову характеристику пространства $\overline{\mathcal{M}}_{2;1}$.
29. Построив сечения соответствующих расслоений, вычислите индекс пересечения $\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0;5}} \psi_1 \psi_2 = \langle \tau_1^2 \tau_0^3 \rangle$.
30. Построив сечения соответствующих расслоений, вычислите индекс пересечения $\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0;6}} \psi_1^2 \psi_2 = \langle \tau_1 \tau_2 \tau_0^4 \rangle$.
31. Построив сечения соответствующих расслоений, вычислите индекс пересечения $\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0;6}} \psi_1^3 = \langle \tau_3 \tau_0^5 \rangle$.

20.4 Вопросы к экзамену

1. Теорема Римана–Роха с доказательством
2. Приложения формулы Римана–Роха: гиперэллиптические кривые и кривые рода 2
3. Приложения формулы Римана–Роха: вычисление Римана
4. Приложения формулы Римана–Роха: кривые рода 3
5. Точки Вейерштрасса на кривых рода 3 и точки перегиба плоских кватрик
6. Точки Вейерштрасса: веса
7. Точки Вейерштрасса: конечность группы автоморфизмов кривой
8. Якобиан и тета-дивизор
9. Теорема Абеля
10. Пространство модулей $\mathcal{M}_{1;1}$ и универсальная кривая над ним
11. Пространства модулей гладких рациональных кривых с отмеченными точками
12. Канонические и плюриканонические вложения
13. Многочлен Гильберта гладкой кривой рода g при каноническом и плюриканоническом вложении
14. Стабильные кривые. Род стабильной кривой.
15. Многочлен Гильберта стабильной кривой при плюриканоническом вложении

16. Эйлерова характеристика пространств модулей рациональных кривых с отмеченными точками
17. Когомологии пространств модулей рациональных кривых с небольшим числом отмеченных точек
18. Комбинаторика стратификации пространств модулей рациональных кривых с небольшим числом отмеченных точек