Факультет математики НИУ ВШЭ
Письменный вступительный экзамен в аспирантуру

14 октября 2011 г.

(продолжительность экзамена 5 часов)

1. Группа G всех целочисленных векторов на плоскости относительно сложения содержит подгруппу H, состоящую из векторов с четными координатами, сумма которых делится на 4. Найдите разложение факторгруппы G/H в прямую сумму циклических групп.

2. В прямоугольном параллелепипеде сумма длин рёбер равна 16, а сумма площадей граней равна 10. Найдите максимальный возможный объём параллелепипеда.

3. Пусть I – единичный куб в $\mathbb{R}^n$ (множество точек, все координаты которых заключены между нулем и единицей). Функция $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ставит в соответствие точке расстояние от неё до границы куба. Найдите интеграл функции φ по I.

4. Пусть E_1, E_2,..., E_n — измеримые по Лебегу подмножества отрезка $[0,1]$, такие что каждая точка отрезка $[0,1]$ содержится в не менее чем k из этих подмножеств. Докажите, что хотя бы одно из E_i имеет меру $\geq \frac{k}{n}$.

5. Существует ли такое конформное отображение кругового сектора с углом 60 градусов на равносторонний треугольник, что при соответствии границ точки излома границы сектора переходят в вершины треугольника?

6. Пусть A, B, C и D — симметрические 3×3 матрицы с комплексными коэффициентами. Докажите, что найдутся такие комплексные числа α, β, γ и δ, не равные одновременно нулю, что матрица $\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D$ имеет ранг не больше единицы.

7. Существует ли непрерывная биекция прямой $\mathbb{R}$ на плоскость $\mathbb{R}^2$?