10 Теории на нетривиальных многообразиях

10.1 Локальные координатные преобразования

Метрика (инфинитезимальное расстояние) на любом многообразии $\mathcal{M}$

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \tag{10.1}$$

Пример: пространство Минковского $\mathbb{R}^4$ (в декартовых координатах)

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{10.2}$$

Однако, в сферических координатах

$$ds^2 = g_{\mu'\nu'}(x')dx'^{\mu'}dx'^{\nu'} = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{10.3}$$

т.е. $(\mu', \nu' = t, r, \theta, \phi)$

$$g_{\mu\nu}(t, r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{10.4}$$

Закон преобразования: $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu = g_{\mu'\nu'}(x')dx'^{\mu'}dx'^{\nu'}$, или

$$g_{\mu'\nu'}(x') = g_{\mu\nu}(x)\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^{\nu'}} \tag{10.5}$$

ковариантность при *локальных* координатных преобразованиях. Матрица преобразования $\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} = \Lambda^\mu_{\mu'}$ сама зависит от координат.

Тот же самый принцип задает закон преобразования для "ковариантного вектора" - компонент 1-формы $A = A_\mu(x)dx^\mu = A_{\mu'}(x')dx'^{\mu'}$, $A \in T^*\mathcal{M}$

$$A_{\mu'}(x') = A_\mu(x)\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} \tag{10.6}$$

($\int A_\mu(x)dx^\mu = \mathrm{inv}$) и для "контравариантного вектора" - компонент векторного поля $V \in T\mathcal{M}$, $V = V^\mu(x)\frac{\partial}{\partial x^\mu} = V^{\mu'}(x')\frac{\partial}{\partial x'^{\mu'}}$

$$V^{\mu'}(x') = V^\mu(x)\frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu} \tag{10.7}$$

Закон преобразования легко обобщается на (p,q)-ю тензорную степень (ко)касательного расслоения $\mathcal{T}_{(p,q)} = (T\mathcal{M})^{\otimes p} \otimes (T^*\mathcal{M})^{\otimes q}$, например метрика - симметричный ковариантный тензор 2-го порядка.

Инвариантная форма объема: из (10.5) следует, что

$$\det g(x') = \det g(x) \cdot (\partial(x)/\partial(x'))^2 \tag{10.8}$$

где $\partial(x)/\partial(x')$ - якобиан замены координат. Поскольку

$$dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^D = \partial(x)/\partial(x') \; dx'^1 \wedge \ldots \wedge dx'^D \tag{10.9}$$

то[1]

$$\sqrt{\det g(x)} \; dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^D = \sqrt{\det g(x')} \; dx'^1 \wedge \ldots \wedge dx'^D \tag{10.10}$$

и можно определить инвариантную форму объема ($D = 4$, лоренцева сигнатура)

$$d^4x \to d\Omega = \sqrt{-\det g(x)} \; dx^0 d^3\mathsf{x} = \sqrt{-\det g(x)} \; d^4x \equiv \sqrt{-g} \; d^4x \tag{10.11}$$

10.2 Частица во внешней метрике

Действие определяется как и для релятивистской частицы в пространстве Минковского

$$S[x;g] = -mc\int \sqrt{g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu} = -mc\int d\tau\sqrt{g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu\dot{x}^\mu} \tag{10.12}$$

Траектория частицы в нетривиальной метрике - решение уравнений движения. Вариация $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$:

$$\begin{aligned} 2ds\;\delta ds &= \delta g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu + 2g_{\mu\nu}(x)\delta dx^\mu dx^\nu = \\ &= \partial_\lambda g_{\mu\nu}(x)\delta x^\lambda dx^\mu dx^\nu + 2g_{\mu\nu}(x)d\delta x^\mu dx^\nu \end{aligned} \tag{10.13}$$

[1]Строго говоря, при извлечении квадратного корня $\sqrt{\det g(x)}$ возникает *модуль* якобиана $|\partial(x)/\partial(x')|$, поэтому это равенство буквально выполняется лишь для преобразований, сохраняющих ориентацию - а в противном случае следует учитывать знак.

или

$$\delta ds = \tfrac{1}{2}\partial_\lambda g_{\mu\nu}(x)\delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{ds}dx^\nu + g_{\mu\nu}(x)\frac{d\delta x^\mu}{ds}dx^\nu \tag{10.14}$$

а стало быть

$$\begin{gathered}
\int \delta ds = \int \tfrac{1}{2}\partial_\lambda g_{\mu\nu}\delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{ds}dx^\nu + \int g_{\mu\nu}\frac{d\delta x^\mu}{ds}dx^\nu = \\
= \int \tfrac{1}{2}\partial_\lambda g_{\mu\nu}\delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{ds}dx^\nu - \int \delta x^\mu d\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{ds}\right) + \\
+ \int d\left(g_{\mu\nu}\delta x^\mu \frac{dx^\nu}{ds}\right) \simeq \\
\simeq \int ds\delta x^\lambda \left(\tfrac{1}{2}\partial_\lambda g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} - \partial_\mu g_{\lambda\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} - g_{\lambda\nu}\frac{d^2x^\nu}{ds^2}\right)
\end{gathered} \tag{10.15}$$

и уравнения движения можно записать как

$$g_{\lambda\nu}\frac{d^2x^\nu}{ds^2} + \left(\partial_\mu g_{\lambda\nu} - \tfrac{1}{2}\partial_\lambda g_{\mu\nu}\right)\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0 \tag{10.16}$$

или, окончательно, (определив метрику с верхними индексами как обратную матрицу $g^{\mu\nu}g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda$), получим уравнение *геодезической*

$$\frac{d^2x^\nu}{ds^2} + \Gamma^\nu_{\mu\lambda}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds} = 0 \tag{10.17}$$

где (переходя от (10.16) к (10.17) мы симметризовали выражение в скобках по μ и ν)

$$\Gamma^\nu_{\mu\lambda} = \tfrac{1}{2}g^{\nu\rho}\left(\partial_\mu g_{\lambda\rho} + \partial_\lambda g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\lambda}\right) \tag{10.18}$$

называются символами Кристоффеля (коэффициентами связности, согласованными с метрикой). В постоянной метрике все $\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = 0$, и геодезическая превращается в прямую $\frac{d^2x^\mu}{ds^2} = 0$ (например, в плоском пространстве Минковского в декартовой системе координат).

10.3 Ковариантные производные. Связность

Посмотрим теперь с другой стороны - забудем про плоское пространство и даже (временно) про метрику. Попробуем определить параллельные вектора на произвольном многообразии $\mathcal{M}$.

Параллельный перенос вектора $V = V^\mu(x)\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ вдоль кривой (траектории) $x^\mu = x^\mu(s)$ с касательным вектором (4-скоростью) $\xi^\mu = dx^\mu/ds$:

$$\frac{dV^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}V^\nu\xi^\lambda = 0 \tag{10.19}$$

где $\{\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\}$ - пока абы какие (не связанные с метрикой, вообще говоря *не* симметричные по нижним индексам) компоненты *связности*, задающей структуру параллельности. Уравнение (10.19) можно переписать в виде

$$\xi^\lambda\nabla_\lambda V^\mu = \frac{dx^\lambda}{ds}\nabla_\lambda V^\mu = \frac{dx^\lambda}{ds}\left(\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}V^\nu\right) = 0 \tag{10.20}$$

где

$$\nabla_\lambda V^\mu = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}V^\nu \equiv V^\mu_{;\lambda} \tag{10.21}$$

будем называть ковариантной производной, а его (однозначное!) решение с начальным условием $x^\mu(0) = x^\mu_P$ определяет параллельный перенос вектора из точки P вдоль траектории $\{x^\mu(s) : x^\mu(0) = x^\mu_P\}$. При $V = \frac{d}{ds} = \frac{dx^\mu}{ds}\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ уравнение (10.19) переходит в (10.17).

- Легко обобщается на (p,q)-ю тензорную степень (ко)касательного расслоения $\mathcal{T}_{(p,q)} = (T\mathcal{M})^{\otimes p} \otimes (T^*\mathcal{M})^{\otimes q}$: - оператор ковариантного дифференцирования $\nabla : \mathcal{T}_{(p,q)} \to \mathcal{T}_{(p,q+1)}$ (ковариантная производная преобразуется как тензор - в отличие, вообще говоря, от обычной производной!). За исключением скаляра, для которого $\Phi \in \mathcal{T}_{(0,0)}$: $\nabla\Phi \in \mathcal{T}_{(0,1)}$ и $\nabla_\mu\Phi = \partial_\mu\Phi$. Взяв в качестве скалярной функции $\Phi = V^\mu A_\mu = \iota_V(A)$ и пользуясь

$$\begin{gathered}\nabla_\lambda(V^\mu A_\mu) = (\nabla_\lambda V^\mu)A_\mu + V^\mu\nabla_\lambda(A_\mu)\\ \nabla_\lambda(V^\mu A_\mu) = \partial_\lambda(V^\mu A_\mu)\end{gathered} \tag{10.22}$$

легко увидеть, что из (10.21), (10.22) следует

$$\nabla_\lambda A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\lambda} - \Gamma^\nu_{\mu\lambda}A_\nu \tag{10.23}$$

правило ковариантного дифференцирования компонент дифференциальной формы;

- Соответственно для $A_{(p,q)} = A^{\nu_1 \dots \nu_p}_{\mu_1 \dots \mu_q} dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_q} \frac{\partial}{\partial x^{\nu_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{\nu_p}} \in \mathcal{T}_{(p,q)}$ действие ковариантной производной $\nabla A_{(p,q)} = B_{(p,q+1)} \in \mathcal{T}_{(p,q+1)}$ дает в компонентах

$$B_{(p,q+1)} = B^{\nu_1 \dots \nu_p}_{\mu\mu_1 \dots \mu_q} dx^{\mu} dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_q} \frac{\partial}{\partial x^{\nu_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{\nu_p}}$$

$$\begin{gathered} B^{\nu_1 \dots \nu_p}_{\mu\mu_1 \dots \mu_q} = \nabla_\mu A^{\nu_1 \dots \nu_p}_{\mu_1 \dots \mu_q} = \partial_\mu A^{\nu_1 \dots \nu_p}_{\mu_1 \dots \mu_q} + \\ + \sum_{i=1}^{p} \Gamma^{\nu_i}_{\mu\lambda_i} A^{\nu_1 \dots \lambda_i \dots \nu_p}_{\mu_1 \dots \mu_n} - \sum_{j=1}^{q} \Gamma^{\lambda_j}_{\mu\mu_j} A^{\nu_1 \dots \nu_p}_{\mu_1 \dots \lambda_j \dots \mu_q} \end{gathered} \tag{10.24}$$

  Удобно говорить, что $B^{\nu_1 \dots \nu_p}_{\mu\mu_1 \dots \mu_q} = \nabla_\mu A^{\nu_1 \dots \nu_p}_{\mu_1 \dots \mu_q} \equiv A^{\nu_1 \dots \nu_p}_{\mu_1 \dots \mu_q ; \mu}$ называется ковариантной производной.

- Преобразование связности (следует из ковариантности уравнений (10.17) и (10.19))

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x) = \Gamma^{\lambda'}_{\mu'\nu'}(x') \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\lambda'}} + \frac{\partial^2 x'^{\rho}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\rho}} \tag{10.25}$$

  неоднородно. Например, в плоском пространстве Минковского в декартовой системе координат $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$, а в криволинейных координатах вообще говоря $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \neq 0$.

  Однако, тензор кручения $(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu})$ - преобразуется однородно. Принято считать (эксперимент), что для наблюдаемого пространства-времени

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} = 0 \tag{10.26}$$

Связность, согласованная с метрикой. Пусть метрика не меняется при параллельном переносе, т.е.

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} g_{\mu\rho} = 0 \tag{10.27}$$

При отсутствии кручения $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$, используя это уравнение (написав его 3 раза циклически переставляя индексы), легко получить формулу (10.18).

10.4 Лагранжианы и действия

Ковариантная запись лагранжианов и действия, необходимая для формулировки теории поля на произвольном многообразии, очевидна

$$
\begin{gathered}
\mathcal{L}(\Phi, \partial\Phi) \to \mathcal{L}(\Phi, \nabla\Phi) \\
S[\Phi] = \int d^4x \; \mathcal{L}(\Phi, \partial\Phi) \to S[\Phi; g] = \int d^4x\sqrt{-g} \; \mathcal{L}(\Phi, \nabla\Phi)
\end{gathered}
\tag{10.28}
$$

- **Пример 1**. Скалярное поле $\nabla_\mu\phi = \partial_\mu\phi$

$$
\begin{aligned}
S[\phi; g] &= \tfrac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - V(\phi)\right) = \\
&= \tfrac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)\right)
\end{aligned}
\tag{10.29}
$$

- **Пример 2**. Электромагнитное поле

$$
\begin{gathered}
\nabla_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A_\lambda \\
\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - A_\lambda\left(\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}\right)
\end{gathered}
\tag{10.30}
$$

т.е. при $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$ (например, связность согласована с метрикой) при замене обычных производных на ковариантные $\partial_\mu A_\nu \to \nabla_\mu A_\nu$ определение антисимметричного тензора поля $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}$ не меняется (определение компонент дифференциальной формы $F = dA$ не зависит от метрики), а поэтому

$$
\begin{aligned}
S[A; g] &= -\frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{-g}\left(\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu\right)\left(\nabla^\mu A^\nu - \nabla^\nu A^\mu\right) = \\
&= -\frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}F_{\mu\nu}F_{\mu'\nu'}
\end{aligned}
\tag{10.31}
$$

- **Пример 3**. Действие Черна-Саймонса

$$
S_{CS} = \int d^3x\epsilon^{ijk}A_i\partial_j A_k = \tfrac{1}{2}\int A \wedge dA \tag{10.32}
$$

вообще не зависит от метрики, м представляет собой действие *топологической* теории поля.

10.5 Тензор энергии-импульса

Как меняется действие при вариации метрики $g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ (технически удобнее рассматривать верхние индексы $g^{\mu\nu} \to g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$)? Проварьируем $S[\Phi; g] = \int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}[\Phi; g]$

$$\begin{aligned} \delta \int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L} = \int d^4x \left(\frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})}\delta\partial_\lambda g^{\mu\nu} \right) \simeq \\ \simeq \int d^4x \left(\frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right) \delta g^{\mu\nu} = \tfrac{1}{2} \int d^4x\sqrt{-g}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{10.33}$$

или, другими словами

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S[\Phi; g]}{\delta g^{\mu\nu}(x)} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left(\frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right) \tag{10.34}$$

который будем называть тензором энергии-импульса. Тензор энергии-импульса очевидно симметричен: $T_{\mu\nu}(x) = T_{\nu\mu}(x)$. Во многих интересных случаях (см., например, действия (10.29), (10.31)) действие не зависит от производных метрики (не содержит нетривиальных ковариантных производных и, стало быть, символов Кристоффеля), и поэтому тензор энергии-импульса целиком определяется первым членом в правой части ф-лы (10.34).

Рассмотрим теперь не произвольную вариацию метрики, а ее изменение при (инфинитезимальной $\delta x^\mu = \xi^\mu(x)$) замене координат

$$\begin{aligned} g'^{\mu'\nu'}(x') = g^{\mu\nu}(x)\frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^{\nu'}}{\partial x^\nu} = \\ = g^{\mu\nu}(x) \left(\delta^{\mu'}_\mu + \frac{\partial\xi^{\mu'}}{\partial x^\mu} \right) \left(\delta^{\nu'}_\nu + \frac{\partial\xi^{\nu'}}{\partial x^\nu} \right) = \\ = g^{\mu'\nu'}(x) + g^{\mu'\nu}\frac{\partial\xi^{\nu'}}{\partial x^\nu} + g^{\nu'\mu}\frac{\partial\xi^{\mu'}}{\partial x^\mu} + \ldots \end{aligned} \tag{10.35}$$

или

$$\delta_\xi g^{\mu\nu} = \partial^\mu\xi^\nu + \partial^\nu\xi^\mu - \xi^\lambda\partial_\lambda g^{\mu\nu} = \nabla^\mu\xi^\nu + \nabla^\nu\xi^\mu \tag{10.36}$$

Тогда

$$\delta_\xi \int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L} = \tfrac{1}{2} \int d^4x\sqrt{-g}T_{\mu\nu}\delta_\xi g^{\mu\nu} = \int d^4x\sqrt{-g}T_{\mu\nu}\nabla^\mu\xi^\nu \tag{10.37}$$

Из инвариантности действия при произвольных $\xi^\mu(x)$ отсюда следует

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 \tag{10.38}$$

ковариантное уравнение сохранения тензора энергии-импульса.

- В плоской метрике (точнее при вариации метрики относительно плоского фона) уравнение сохранения

  $$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0 \tag{10.39}$$

  стандартное для тензора энергии-импульса, а сам он является генератором постоянных сдвигов $\partial^\mu \xi^\nu + \partial^\nu \xi^\mu = 0$, $\xi^\mu(x) = \xi_0^\mu = \mathrm{const}$. В плоском пространстве-времени Минковского это постоянные сдвиги по времени, инвариантность действия относительно которых приводит к сохранению энергии, и в пространстве - генерирующие закон сохранения импульса (лекция 6). В нетривиальной метрике решения

  $$\nabla^\mu \xi^\nu + \nabla^\nu \xi^\mu = 0 \tag{10.40}$$

  оставляющие метрику инвариантной $\delta_\xi g^{\mu\nu} = 0$ называются (если они есть!) векторами Киллинга.

- При вариации действия $\delta_\xi S$ мы пренебрегли изменением других полевых переменных Φ, дающих вклад в вариацию действия пропорцональный $\frac{\delta S}{\delta \Phi}$. То есть тензор $T_{\mu\nu}$ сохраняется таки *только* на уравнениях движения $\frac{\delta S}{\delta \Phi} = 0$, и является единственным "универсальным" симметричным тензором 2-го порядка, сохраняющимся на уравнениях движения.

- В теории с динамической метрикой (гравитации) - если считать метрику "полевой" переменной - тензор энергии импульса, как следует из (10.33), является источником для гравитационного поля - представляет собой линейный отклик действия материи на вариацию гравитационного поля.