13 Решение Шварцшильда

Рассмотрим теперь какие-нибудь точные решения уравнений ОТО

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi\kappa}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{13.1}$$

Для начала - рассмотрим случай тяготеющего тела массы M, с единственной ненулевой компонентой тензора энергии-импульса в покоящейся системе отсчета $T_0^0 = Mc^2\delta^{(3)}(\mathsf{x})$, и определим сразу качественно, когда именно могут возникать существенные релятивистские поправки к закону тяготения Ньютона.

13.1 Гравитационный радиус

Когда скорость света может оказаться существенной для поправок к закону тяготения? Мичелл-Кавендиш: (2-я космическая скорость)

$$\frac{mv^2}{2} - \kappa\frac{mM}{r} = 0 \tag{13.2}$$

откуда

$$r = \frac{2\kappa M}{v^2} \quad \underset{v=c}{\Rightarrow} \quad r_G = \frac{2\kappa M}{c^2} \tag{13.3}$$

Для массы Земли $r_G \approx 1$ см, для Солнца $r_G \approx 3$ км $= 3 \cdot 10^5$ см. Однако для Стрельца-A^* в центре Галактики $r_G \approx 10^7$ км $= 10^{12}$ см.

Для “обычных” тел их реальный размер $R \gg r_G$, для нейтронных звезд считается, что они одного порядка $R \approx 3r_G$, (при этом становятся существенными релятивистские эффекты), ну а если вдруг окажется, что $R \leq r_G$, то такой объект (гипотетический, т.к. его можно наблюдать лишь по косвенным данным) называется *черной дырой*. Все это следует просто из закона тяготения Ньютона без какой-либо ОТО.

13.2 Метрика Шварцшильда

Центрально-симметричный анзац

$$ds^2 = e^{\nu} c^2 dt^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - e^{\lambda} dr^2 \tag{13.4}$$

с двумя функциями $\lambda = \lambda(r, t)$ и $\nu = \nu(r, t)$. Координата r в (13.4) означает, то площадь соответствующей любому ее значению сферы S^2_r есть $4\pi r^2 = \int_{S^2_r} r^2 \sin\theta d\theta d\phi$, а длина любой большой окружности на этой сфере равна $2\pi r$, в то время как расстояние от поверхности этой сферы до начала координат есть $\int_0^r e^{\lambda/2} dr' \neq r$.

Задача: *вычислить символы Кристоффеля для метрики (13.4), и компоненты тензора Риччи.*

Уравнения ОТО (10 уравнений $R_{\mu\nu} = 0$ при $r \neq 0$) при этом сводятся к следующим *независимым* уравнениям

$$\begin{aligned} e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} = 0 \\ e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = 0 \\ \dot{\lambda} = 0 \end{aligned} \tag{13.5}$$

являющимися, более того, уравнениями *первого* порядка. Из этих условий немедленно следует, что $\lambda' + \nu' = 0$, что вместе с $\dot{\lambda} = 0$ позволяет выбрать $\lambda + \nu = 0$ с точностью до замены времени $e^{\nu/2} dt \to dt$, а для оставшейся функции найти

$$\exp(\nu) = \exp(-\lambda) = 1 - \frac{r_G}{r} \tag{13.6}$$

где константа интегрирования $r_G = \frac{2\kappa M}{c^2}$ определяется из асимптотического поведения при $r \to \infty$, которое должно воспроизвести закон Ньютона $g_{00} \approx 1 + \frac{2\Phi}{c^2} = 1 + \frac{2\kappa M}{c^2 r}$. Таким образом, метрика Шварцшильда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_G}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_G}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{13.7}$$

- является точным сферически-симметричным решением ОТО в пустоте (за исключением точки $r = 0$, в которой сосредоточена масса M);

- воспроизводит закон тяготения Ньютона при $r \gg r_G = \frac{2\kappa M}{c^2}$ (поправки к g_{rr} порядка c^{-2} имеют место быть, но не влияют на выводы);

- перестает иметь буквальный смысл при $r = r_G$ вследствие сингулярности компонент метрики g_{00} и g_{rr}. Заметим однако, что входящий в форму объема $g = \det g_{\mu\nu}$ и инварианты кривизны *несингулярны* при $r = r_G$, в частности $R_{\mu\nu}|_{r=r_G} = 0$. Сингулярность Шварцшильда тем самым является фиктивной, и, как мы попробуем убедиться в дальнейшем, может быть устранена выбором системы координат.

13.3 Падение на сферу Шварцшильда

Движение (падение) пробной частицы в Шварцшильдовской метрике легче всего найти с помощью уравнения Гамильтона-Якоби

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial S}{\partial x^\mu}\frac{\partial S}{\partial x^\nu} - m^2c^2 = 0 \tag{13.8}$$

первого порядка вместо уравнений геодезической[1]. В метрике (13.7) для движения в плоскости $\theta = \pi/2$ (есть соотвествующий интеграл движения) получаем уравнение

$$\frac{1}{1-\frac{r_G}{r}}\frac{S_t^2}{c^2} - \left(1 - \frac{r_G}{r}\right)S_r^2 - \frac{S_\phi^2}{r^2} - m^2c^2 = 0 \tag{13.9}$$

решение которого можно искать разделением переменных

$$S = -Et + L\phi + R(r) \tag{13.10}$$

При $r \gg r_G$ и $L \neq 0$ уравнение (13.9) воспроизводит законы Кеплера, релятивистская поправка к которым дает эффект смещения перигелия орбиты за период на угол порядка $\Delta\phi \sim r_G/\langle r\rangle$.

При радиальном падении на центр $L = 0$ и

$$R'(r) = \pm\frac{1}{1-\frac{r_G}{r}}\sqrt{\frac{E^2}{c^2} - m^2c^2\left(1 - \frac{r_G}{r}\right)} \tag{13.11}$$

[1] Смысл уравнения Гамильтона-Якоби очевиден: условие “массовой поверхности” $p_\mu p^\mu = m^2c^2$ для 4-импульса релятивистской частицы $p_\mu = \frac{\partial S}{\partial x^\mu}$ в произвольной метрике - хотя и данное рассуждение является не вполне строго обоснованным.

Закон движения находится из условия $\frac{\partial S}{\partial E} = -t + \frac{\partial R}{\partial E} = \mathrm{const}$[2], или

$$t - t_0 = -\int_{r_0}^{r} \frac{d\tilde{r}}{1-\frac{r_G}{\tilde{r}}} \frac{E/c^2}{\sqrt{\frac{E^2}{c^2} - m^2c^2\left(1-\frac{r_G}{\tilde{r}}\right)}} \tag{13.12}$$

где знак выбран из условия $\frac{dr}{dt} < 0$. Пусть $t_0 = 0$, $r|_{t=0} = r_0$, $\frac{dr}{dt}\big|_{t=0} = 0$, тогда из (13.12)

$$\frac{1}{1-\frac{r_G}{r_0}} \frac{E^2}{c^2} - m^2c^2 = 0 \tag{13.13}$$

и интеграл для времени падения

$$t = -\frac{1}{c}\int_{r_0}^{r} \frac{d\tilde{r}}{1-\frac{r_G}{\tilde{r}}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1-\frac{r_G}{\tilde{r}}}{1-\frac{r_G}{r_0}}}} \tag{13.14}$$

легко вычисляется. На верхнем пределе при подходе к гравитационному радиусу $r \approx r_G$

$$t \approx -\frac{1}{c}\int^{r} \frac{\tilde{r}d\tilde{r}}{\tilde{r} - r_G} \approx -\frac{r_G}{c}\log(r - r_G) \tag{13.15}$$

или $r - r_G \approx r_G \exp(-ct/r_G)$, а это означает, что

- Время достижения гравитационного радиуса (или сферы Шварцшильда) бесконечно, интеграл (13.14) расходится, если $r = r_G$;

- Пробная частица, приблизившись к сфере Шварцшильда, “залипает” для внешнего наблюдателя, который видит экспоненциальное к ней приближение с характерным временем[3] r_G/c;

- Ясно, что все это является лишь следствием эффекта замедления времени в гравитационном поле, так как в метрике Шварцшильда

[2]Смысл этого условия заключается в том, что действие - решение уравнения Гамильтона-Якоби - можно рассматривать как функцию, осуществляющую каноническое преобразование к новым обобщенным координатам с нулевым гамильтонианом. Если в качестве такой новой обобщенной координаты выбрать E, то соответствующий ей обобщенный импульс $-\frac{\partial S}{\partial E}$ при нулевом гамильтониане является интегралом движения - т.е. не зависящей от времени константой.

[3]Даже для центра Галактики это время $\frac{r_G}{c} \sim \frac{10^{12}cm}{3\cdot 10^{10}cm/s} \approx 30s$.

$g_{00} = 1 - \frac{r_G}{r} \underset{r \to r_G}{\to} 0$. Собственное время на падающей частице

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}c^2dt^2 - g_{rr}dr^2} = \frac{dr}{c}\sqrt{g_{00}\left(c\frac{dt}{dr}\right)^2 - g_{rr}} = \\ = \frac{dr}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{r_G}{r}}}\sqrt{\frac{1}{1-\frac{1-\frac{r_G}{r}}{1-\frac{r_G}{r_0}}} - 1} = \frac{dr}{c}\frac{1}{\sqrt{\frac{r_G}{r} - \frac{r_G}{r_0}}} \tag{13.16}$$

и интеграл $\tau \approx \int^r d\tau$ сходится при $r = r_G$, а "скорость" $\frac{dr}{d\tau}$ при $r \to r_G$, $r_0 \to \infty$ стремится к скорости света c.

Пространство с метрикой Шварцшильда таким образом является геодезически неполным. Что же происходит при падении дальше (по собственному времени)?