

Анализ 1 модуль 2012 год Листок 0

Рациональное число можно определить двумя чуть-чуть разными способами.

Способ 1: рациональное число это несократимая дробь p/q с положительным знаменателем.

Способ 2: рациональное число это совокупность всех дробей $\{m/n\}$, задающих это число.

Множество в предыдущем определении задается во внутренних терминах: Две дроби p/q и r/s определяют одно и то же рациональное число титтк (тогда и только тогда когда) существуют не равные нулю целые числа m и n такие что $mp = nr, mq = ns$. Если выполняется это условие, то скажем что дробь p/q эквивалентна дроби r/s (обозначается $p/q \sim r/s$). Тем самым, рациональное число вторым способом – это класс эквивалентности дробей, если понять что такое класс эквивалентности

1. Сформулируйте определение класса эквивалентности. Продумайте, почему важна транзитивность: если $\alpha \sim \beta$ и $\beta \sim \gamma$ то $\alpha \sim \gamma$.

2. Сопоставьте рациональному числу, определенному первым способом, рациональное число, определенное вторым способом, как класс эквивалентности.

Иными словами, каждая несократимая дробь (впрочем как и любая дробь) лежит в своем классе эквивалентности.

Соответствие в обратную сторону менее тривиально и использует теорию делимости целых чисел (Приведение дроби к несократимой) и означает что в каждом классе эквивалентности лежит несократимая дробь с положительным знаменателем.

Исходно, не вполне ясно, для чего нужно второе описание рациональных чисел. Попробуем понять.

Надеюсь, что складывать несократимые дроби, приводя их к общему знаменателю и сокращая в дальнейшем при необходимости получившийся результат до несократимой дроби вы умеете.

При втором способе описания рациональных чисел процедура сложения проще: вместо приведения к общему знаменателю для двух классов эквивалентности $\{p/q\}$ и $\{r/s\}$ найдем представителей p/q и r/s с одинаковыми знаменателями $q = s$ и рассмотрим класс соответствующей дроби. Не все так уж безобидно, еще надо кое-что проверить: что этот класс не зависит от выбора исходных представителей.

3. Корректность определения сложения классов эквивалентности. Пусть $p_1/n \sim r_1/m$ и $p_2/n \sim r_2/m$. Докажите, что $(p_1 + p_2)/n \sim (r_1 + r_2)/m$

4. Совпадение определений сложения. Докажите, что стандартное сложение дробей дает тот же результат, что и определение вторым способом с помощью классов эквивалентности.

А теперь выигрыш от второго способа. Надо бы доказать сочетательный закон: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

5. Докажите сочетательный закон для стандартного определения сложения дробей.

6. Докажите сочетательный закон для определения сложения дробей через классы эквивалентности.

Использовали ли вы в задаче 6 транзитивность эквивалентности?

Следующая задача не имеет отношения к предыдущим.

Надеюсь, что вы умеете складывать (конечные) десятичные дроби.

7. Можно ли определить сложение бесконечных десятичных дробей?