

Механика и теория поля. Листок 1

1. Материальная точка массы m движется без трения по поверхности кругового цилиндра радиуса R в отсутствие внешних сил. Напишите лагранжиан этой системы, уравнения движения и интегралы движения. Как выглядят траектории движения частицы?

2. Материальная точка массы m движется без трения по поверхности кругового конуса с углом раствора 2α в однородном поле тяжести g . Ось конуса ориентирована вертикально, вершина направлена вниз. Напишите лагранжиан этой системы, уравнения движения и интегралы движения. Как выглядят траектории движения частицы в отсутствие силы тяжести?

3. Вдоль некоторой хорды Земного шара просверлен узкий сквозной туннель. В него помещается массивный шарик, который может двигаться в туннеле без трения. Найдите закон движения шарика и определите время, по истечении которого шарик появится на другом конце туннеля, если его начальная скорость на входе в туннель равнялась нулю. Как зависит это время от положения (длины) туннеля? При решении задачи считайте Землю однородным шаром массы $6 \cdot 10^{24}$ кг и радиуса 6400 км. Константа гравитационного взаимодействия $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11}$ м³/(кг·с²).

Указание. Потенциал гравитационного взаимодействия внутри однородной сферы массы m постоянен, а вне сферы совпадает с потенциалом точечной массы m , помещенной в центр сферы.

4. а) Для системы n свободных частиц в трехмерном евклидовом пространстве найдите интегралы движения, связанные с инвариантностью относительно перехода из данной инерциальной системы отсчета в другую систему, равномерно и прямолинейно движущуюся относительно исходной (одно из преобразований группы Галилея).

б) Для системы n частиц, связанных парными взаимодействиями с потенциальной энергией вида $U(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$ (\vec{r}_i и \vec{r}_j — радиус-векторы частиц i и j), найдите интегралы движения, отвечающие инвариантности относительно поворотов системы отсчета вокруг начала координат.