

# Теорминимум: теория поля

1. Рассмотрим действие

$$S = \frac{1}{2} \int (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2) d^4x$$

для скалярного поля  $\varphi$  в пространстве Минковского с сигнатурой  $(+1, -1, -1, -1)$  и координатами  $x_0 = t$ ,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ . (Скорость света положена равной 1.)

- Написать уравнение движения поля  $\varphi$ , найти его общее решение.
- Найти эволюцию во времени волнового пакета ширины  $a$ , т.е. найти решение уравнения движения с начальным условием  $\varphi(t=0) = e^{-x^2/a}$ . Чему равна скорость движения максимума волнового пакета?

2. Рассмотрим действие

$$S = \int \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{m^2}{\beta^2} (1 - \cos(\beta\varphi)) \right) d^2x$$

для скалярного поля  $\varphi$  в двумерном пространстве Минковского с сигнатурой  $(+1, -1)$  и координатами  $x_0 = t$  и  $x_1 = x$ .

- Написать уравнение движения поля  $\varphi = \varphi(x, t)$  и найти его точное решение вида  $\varphi(x, t) = f(x - vt)$ , такое что  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - f(-x)) = \frac{2\pi}{\beta}$ .
- Вычислить энергию и импульс найденного решения.

3. Дана одномерная цепочка спинов  $\{\sigma\}$ , направленных вниз или вверх:  $\sigma = \pm 1$  с Гамильтонианом  $H = -J \sum_i \sigma_{i+1} \sigma_i$ , где  $J$  - некоторая константа. Найдите статистическую сумму для этой цепочки,  $Z = \sum_{\{\sigma\}} e^{-H/T}$  и двухточечную корреляционную функцию:

$$\langle \sigma_i \sigma_k \rangle \equiv \frac{1}{Z} \sum_{\{\sigma\}} \sigma_i \sigma_k e^{-H/T}$$

в случаях:

- цепочки конечного размера  $i = 1, \dots, N$  со свободными условиями на концах;
- бесконечной цепочки,  $i \in \mathbb{Z}$ ;
- конечной цепочки  $i = 1, \dots, N$  с периодическими граничными условиями  $\sigma_{N+1} = \sigma_1$ .

4. Действие для главного кирального поля в двумерном пространстве Минковского с сигнатурой  $(+1, -1)$  и координатами  $x_0 = t$  и  $x_1 = x$  имеет вид

$$S = \int \text{tr} (\partial_\mu g \partial^\mu g^{-1}) d^2x$$

Здесь  $g(t, x) \in SL(N)$  - обратимая матрица, зависящая от точки пространства-времени, а  $\text{tr}$  - операция взятия следа.

- Написать уравнение движения главного кирального поля.
- Что нужно сделать с действием, чтобы уравнения движения приобрели вид условия голоморфности некоторого тока?

5. Найти уравнения движения для теории векторного поля с действием:

$$S = \int d^4x \left( \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \gamma F_\mu^\nu F_\nu^\alpha F_\alpha^\mu \right),$$

где  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ , а  $\gamma$  - некоторая (размерная) константа. Есть ли в этой теории фотоны?

6. Рассмотрим трехмерную теорию векторного поля с действием

$$S = \frac{1}{4g^2} \int d^3x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{k}{2\pi} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\alpha} A_\mu \partial_\nu A_\alpha$$

- Инвариантно ли это действие относительно калибровочных преобразований?
- Чему равна масса фотона в этой теории?